ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVIII 1964 4

АСТРОФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, академик

Об одной задаче нелинейной теории рассеяния света в мутной среде

(Представлено 26/III 1964)

В настоящее время все большую актуальность приобретают вопросы нелинейной теории многократного рассеяния света [1, 2]. Нелинейные задачи возникают, например, при изучении процессов, в которых существенную роль играет обмен энергиями между полями излучения, соответствующими частотам различных спектральных линий атомов среды. Например, один из простейших случаев таких процессов, рассмотренный в [1], соответствует среде, состоящей из атомов, имеющих три состояния и три спектральные линии. Однако имеются и такие физические задачи, в которых можно ограничиться рассмотрением излучения только в одной спектральной линии и для которых, тем не менее, при известных условиях (высокая плотность излучения), линейное приближение является недостаточным. Простейшим таким примером является проблема рассеяния монохроматического излучения в атмосферном слое, состоящем из атомов, имеющих два возможных состояния, когда учитывается „отрицательное поглощение". Характерной чертой нелинейных задач является наличие эффектов просветления и помутнения среды, т. е. изменения оптический толщины.

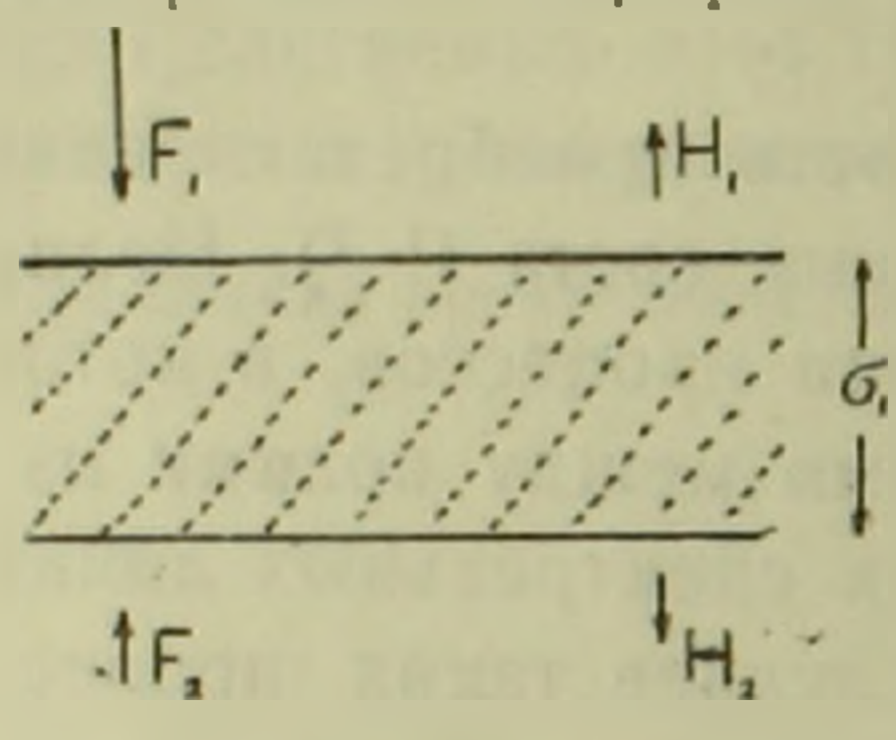
Представляет интерес выяснить, *в какой мере методы решения математических задач обычной линейной теории переноса излучения* [3] *могут быть применены в области нелинейных задач.*

Для простоты рассмотрим одномерную задачу о рассеянии света в однородной среде конечной толщины. В [1] было показано, как эта задача, взятая в линейном приближении, в результате применения метода сложения двух слоев (принцип инвариантности), приводится к сравнительно простым функциональным уравнениям, для которых получаются хорошо известные из обычной теории решения.

С первого взгляда может показаться, что принцип инвариантности не может быть применен в нелинейных задачах, так как оптические свойства (прозрачность и др.) прибавляемого слоя зависят от падающих на него потоков излучения. Однако на примере, рассмотренном в настоящей работе, мы показываем, что эта трудность может быть обойдена.

В нелинейной теории толщина среды должна быть охарактеризована некоторым параметром. В качестве такого параметра оказывается неудобным взять реальную оптическую толщину, ибо вследствие упомянутых выше эффектов просветления и помутнения она оказывается переменной величиной, зависящей от существующего в среде поля излучения. Вместо нее можно использовать в качестве параметра значение оптической толщины, когда интенсивность излучения во всех точках среды стремится к нулю. Будем эту величину называть в дальнейшем *предельной оптической толщиной*.

§ 1. Рассмотрим для простоты следующую одномерную задачу. На две границы среды, обладающей предельной оптической толщиной σ_1, падают потоки излучения F_1 и F_2. Требуется найти соответствующие выходящие потоки H_1 и H_2 (фиг. 1). При этом нас не будет интересовать природа элементарных актов рассеяния. Будем лишь считать, что среда имеет одинаковые свойства для лучей, идущих в обоих направлениях. При этом условии будем иметь



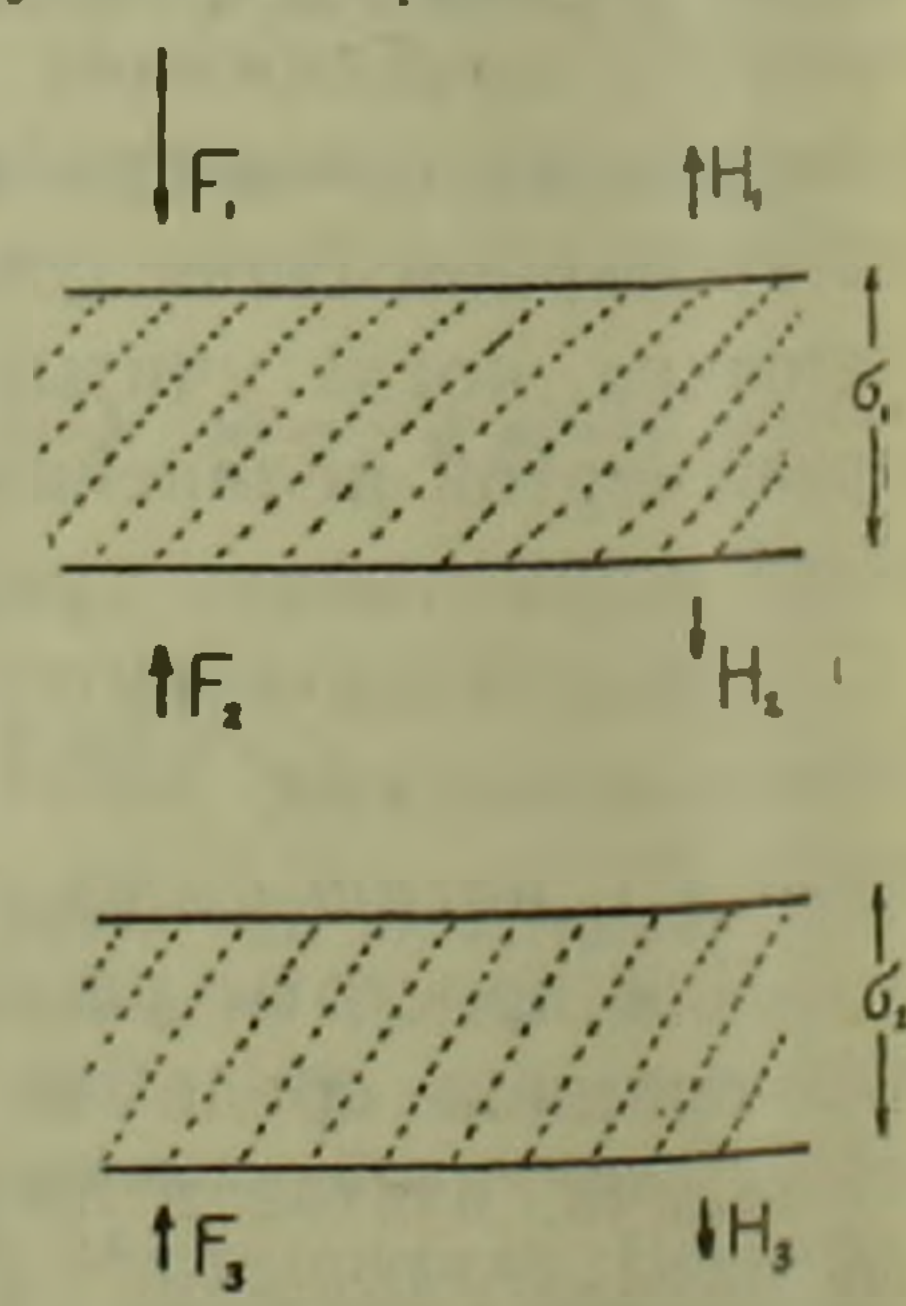
Фиг. 1.

$$H_1 = \varphi(F_1, F_2; \sigma_1), \tag{1}$$

$$H_2 = \varphi(F_2, F_1; \sigma_1). \tag{2}$$

Таким образом, среда является как бы „черным ящиком“, свойства которого характеризуются функцией φ. Но в отличие от других „черных ящиков“ мы в этом случае знаем кое-что о его свойствах и, в частности, что среда с толщиной $\sigma_1 + \sigma_2$ может рассматриваться как сумма двух, правда взаимодействующих, сред с толщинами σ_1 и σ_2. Благодаря этому требованию функция φ уже не может быть произвольной функцией от трех аргументов. Она должна подчиняться некоторым условиям, которые мы постараемся отыскать. После этого следует определить функцию φ, удовлетворяющую найденным условиям.

Используем метод сложения двух слоев. Пусть σ_1 и σ_2 будут предельные оптические толщины этих слоев. Тогда из схемы, представленной на фиг. 2, видно, что в дополнение к (1) и (2) мы будем иметь следующие соотношения:



Фиг. 2.

$$F_2 = \varphi(H_2, F_3; \sigma_2), \tag{3}$$

$$H_3 = \varphi(F_3, H_2; \sigma_2), \tag{4}$$

$$H_1 = \varphi(F_1, F_3; \sigma_1 + \sigma_2), \tag{5}$$

$$H_3 = \varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2). \tag{6}$$

Сравнивая (6) с (4), имеем:

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(F_3, H_2; \sigma_2).$$

Подставляя в правую часть вместо H_2 его значение из (2), получаем

$$\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3,\ \varphi(F_2,\ F_1;\ \sigma_1);\ \sigma_2). \tag{7}$$

С другой стороны, подставляя (2) в (3), находим

$$F_2=\varphi(\varphi(F_2,\ F_1;\ \sigma_1),\ F_3;\ \sigma_2). \tag{8}$$

Пусть решение этого уравнения относительно F_2 будет:

$$F_2=u(F_1,\ F_3;\ \sigma_1;\ \sigma_2). \tag{9}$$

Функция u целиком определяется заданием φ. Поэтому мы можем сказать, что, подставляя (9) в (7), мы будем иметь уравнение

$$\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3,\ \varphi(u(F_1,\ F_3;\ \sigma_1,\ \sigma_2),\ F_1;\ \sigma_1);\ \sigma_2), \tag{10}$$

обе части которого выражаются через φ. Следовательно, уравнение (10) вместе с определением функции u из соотношений (8) и (9) есть некоторое весьма своеобразное ф у н к ц и о н а л ь н о е у р а в н е н и е для ф у н к ц и и φ.

Попытаемся найти вместо полученного функционального уравнения дифференциальное. Для этого допустим, что σ_2 есть малая величина. Тогда уравнение (3) перепишется в виде

$$F_2=F_3+\alpha(H_2,\ F_3)\sigma_2. \tag{11}$$

Вводя сюда вместо H_2 его значение из (2), получаем:

$$F_2=F_3+\alpha(\varphi(F_2,\ F_1;\ \sigma_1),\ F_3)\sigma_2.$$

С точностью до величин второго порядка малости мы можем в последнем члене заменить F_2 через F_3. Тогда

$$F_2=F_3+\alpha(\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1),\ F_3)\sigma_2. \tag{12}$$

С другой стороны, сравнивая (6) с (4), получаем:

$$\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3,\ H_2;\ \sigma_2), \tag{13}$$

а из фиг. 2 имеем

$$H_3=\varphi(F_3,\ H_2;\ \sigma_2)=H_2+\alpha(F_3,\ H_2)\sigma_2. \tag{14}$$

Внося (13) в (12) находим:

$$\varphi(F_3,\ F_1,\ \sigma_1+\sigma_2)=H_2+\alpha(F_3,\ H_2)\sigma_2. \tag{15}$$

Подставляя сюда вместо H_2 его значение из (2), можем написать:

$$\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_2,\ F_1;\ \sigma_1)+\alpha(F_3,\ \varphi(F_2,\ F_1;\ \sigma_1))\sigma_2. \tag{16}$$

Внесем, наконец, сюда значение F_2 из (12). Имеем

$$\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3+\alpha(\varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1),\ F_3)\sigma_2,\ F_1;\ \sigma_1)+ \\ +\alpha(F_3,\ \varphi(F_3,\ F_1;\ \sigma_1))\sigma_2, \tag{17}$$

причем, в последнем члене, пренебрегая величинами порядка σ_2^2, мы заменили F_2 через F_3.

Разлагая по степеням σ_2, отбрасывая члены второго порядка и выше, а также сокращая, мы находим отсюда

$$\frac{\partial\varphi(F_3, F_1; \sigma_1)}{\partial\sigma_1} = \frac{\partial\varphi(F_3, F_1; \sigma_1)}{\partial F_3}\alpha(\varphi(F_3, F_1; \sigma_1), F_3) + \alpha(F_3, \varphi(F_3, F_1; \sigma_1)). \tag{18}$$

Итак, мы получили нелинейное дифференциальное уравнение для функции φ. Для упрощения переменим обозначения

$$H_3 = \varphi(F_3, F_1; \sigma_1) = z; \quad F_1 = x; \ F_3 = y; \quad \sigma_1 = \sigma. \tag{19}$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial\sigma} = \frac{\partial z}{\partial y}\alpha(z, y) + \alpha(y, z). \tag{20}$$

При $\sigma \to \infty$ наша задача превращается в простую проблему нахождения диффузно отраженного от бесконечно толстого слоя потока $H_2 = z$, когда на него падает поток $F_3 = y$. Очевидно, что в этом случае z будет зависеть только от y и от свойств среды, т. е. формы функции $\alpha(z, y)$. Поэтому, принимая во внимание, что при $\sigma \to \infty$ имеем $\frac{\partial z}{\partial\sigma} = 0$, получим для задачи диффузного отражения более простое уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial y}\alpha(z, y) + \alpha(y, z) = 0. \tag{21}$$

Остановимся сперва на этом случае.

§ 2. Выясним сначала свойства симметрии функции $\alpha(z, y)$, характеризующей свойства элементарного слоя и определяемой уравнением (11).

Если допустить, что элементарный слой толщиной σ_2 может, с одной стороны, ослаблять падающее и проходящее через него излучение, а с другой стороны, испускать в обе стороны поровну излучение, интенсивность которого зависит от полной плотности излучения, то формулу (11) надо написать в виде

$$F_2 = F_3 - k(F_3 + H_2)F_3\sigma_2 + g(F_3 + H_2)\sigma_2, \tag{22}$$

где k и g суть некоторые функции от аргумента, написанного в скобках. В линейной теории переноса излучения $g(x)$ просто пропорционально x, а k — постоянно.

Сравнивая определение (11) с (22), имеем:

$$\alpha(H_2, F_3) = -k(F_3 + H_2)F_3 + g(F_3 + H_2),$$

или в сокращенных обозначениях

$$\alpha(z, y) = -k(z + y)y + g(z + y) \tag{23}$$

Поэтому уравнение (21) принимает вид:

$$\frac{\partial z}{\partial y}[ky - g] = g - kz,$$

откуда придем к уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial y}+z=\frac{1}{k}g(z+y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}+1\right). \tag{24}$$

Введем функцию

$$\int_0^x \frac{g(\xi)\,d\xi}{k(\xi)}=G(\xi). \tag{25}$$

Находим решение (24) в виде

$$yz=G(y+z)+C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Если $z=0$ при $y=0$, то $C=0$. Поэтому

$$yz=G(y+z). \tag{26}$$

Отсюда, в частности при $g(\xi)=\frac{\lambda}{2}k\xi$, т. е. в линейном случае, когда из поглощенной энергии рассеивается доля λ, имеем:

$$yz=\frac{\lambda}{4}(y+z)^2. \tag{27}$$

Решение этого уравнения дает обычную формулу для „альбедо"

$$\frac{z}{y}=\frac{2-\lambda-\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}. \tag{28}$$

Пусть теперь

$$g(\xi)=\frac{\lambda}{2}k(\xi)\frac{a^2\xi}{a^2+\xi^2}, \tag{29}$$

где a — некоторая постоянная, т. е. внесем нелинейность, выражающуюся в том, что при рассеянии элементарным слоем из поглощаемой энергии рассеивается лишь доля

$$\lambda\frac{a^2}{a^2+\xi^2},$$

т. е. при увеличении плотности энергии ξ эта доля уменьшается, а доля, приходящаяся на истинное поглощение, возрастает. Тогда

$$G(x)=\frac{\lambda}{4}a^2\ln\left[1+\frac{x^2}{a^2}\right]$$

и решение имеет вид

$$yz=\frac{\lambda}{4}a^2\ln\left[1+\frac{(y+z)^2}{a^2}\right], \tag{30}$$

откуда видно, что при увеличении потока y до бесконечности альбедо $\frac{z}{y}$ стремится к нулю. Наоборот, при $y\ll a$ будем иметь для альбедо формулу, совпадающую с (28).

§ 3. В с учае слоя конечной оптической толщины следует вернуться к уравнению (20), подставив в него выражение (23) для коэффициента $\alpha(z, y)$. Найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}=\frac{\partial z}{\partial y}[-k(z+y)y+g(z+y)]+[-k(z+y)z+g(z+y)]. \quad (31)$$

Это уравнение может быть решено известными методами, если только заданы функции $k(x)$ и $g(x)$.

Мы не будем останавливаться здесь на характере решений для разных частных случаев. Очевидно, что эти решения могут быть получены и другими способами, в частности путем интегрирования уравнений, описывающих условия внутри среды. Но нашей задачей было показать что рассматриваемая проблема допускает последовательное применение принципа инвариантности.

Надо, однако, иметь в виду, что применение принципа инвариантности должно принести существенную пользу главным образом при решении сложных задач: многомерных или связанных с наличием нескольких взаимодействующих частот излучения.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Պղտոր միջավայրում լույսի ցրման ոչ գծային տեսության մի խնդրի մասին

Լույսի բազմապատիկ ցրման ոչ գծային խնդրի միաչափ դեպքում կիրառվում է ինվարիանտության սկզբունքը: Ի տարբերություն գծային դեպքից դիֆուզ անդրադարձման ու թափանցման գործակիցների փոխարեն անհրաժեշտ է դառնում մտցնել անդրադարձման-թափանցման մի ֆունկցիա $\varphi(F_1, F_2)$, որի համար ստացվում է (10) ֆունկցիոնալ հավասարումը: Այդ ֆունկցիոնալ հավասարումը կարելի է բերել (18) ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման:

Անվերջ օպտիկական հաստության դեպքում խնդիրը բերվում է (24) հավասարման: Նրա լուծումը տալիս է մեկ անդրադարձման ֆունկցիա: Այդ լուծումը արտահայտվում է (26) և (25) բանաձևերով: Մասնավոր դեպքում ստացվում է գծային խնդրի հայտնի լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Амбарцумян*, Monthly Notices of RAS, 95, 469. 1935; Ученые записи ЛГУ, 31, 5. 1939. Научные труды, т. I, стр. 78—102 Изд. АН АрмССР. Ереван, 1960. [2] *А. П. Иванов*, Оптика и спектроскопия 14, 275, 1963 [3] *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гос. изд. тех. теор. лит., 1956. [4] Изв АН АрмССР, естеств. науки, № 1—2, 1944.