

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. С. Заргарян

Кручение кругового цилиндра, имеющего несоосную
 многогранную полость

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 3/1 1964)

Рассмотрим задачу кручения цилиндра, поперечное сечение которого представляет двусвязную область, внутренний контур которого является прямолинейным многоугольником с закругленными углами, а внешний контур — произвольно расположенной по отношению к внутреннему контуру приближенной окружностью.

Предлагаемый в настоящей статье способ отличен от метода Д. И. Шермана (1-3), использованного в (4). Для рассматриваемой двусвязной области, представляющей поперечное сечение цилиндра, строится отображающая функция, реализующая конформное отображение концентрического кольца на эту двусвязную область. Задача кручения кругового цилиндра, имеющего соосную многогранную полость, методом конформного отображения рассмотрена в (5).

1. Пусть функция

$$z = \varrho(w) = D \left(\frac{1}{w} + C_1 w + C_2 w^2 + \dots + C_n w^n + \dots \right) \quad (w = Re^{i\varphi}) \quad (1.1)$$

реализует конформное отображение внутренности единичного круга $w < 1$ на внешность замкнутой кривой Γ (граница бесконечной односвязной области), причем образом окружности $|w| = 1$ является сама кривая Γ , а образом окружности $|w| = R < 1$ независимо от вида Γ при достаточно малых R — приближенная окружность Γ_1 .

Зададимся целью получить отображающую функцию двусвязной области, одна из границ которой совпадала бы с Γ , а другая Γ_2 , близкая к окружности, имела бы произвольное по отношению к Γ расположение, отличное от прежней Γ_1 . Для этого поступим следующим образом: единичный круг $|w| \leq 1$, который с помощью функции (1.1) отображается на внешность замкнутой кривой Γ , отобразим на самого себя известной функцией

Разложим функцию $G(\zeta_1)$ вне круга $|\zeta_1| = |a|$ в ряд:

$$G(\zeta_1) = \frac{1 - \bar{a}\zeta_1}{\zeta_1 \left(1 - \frac{a}{\zeta_1}\right)} = \frac{1 - \bar{a}\zeta_1}{\zeta_1} \left(1 + \frac{a}{\zeta_1} + \frac{a^2}{\zeta_1^2} + \dots\right) \\ = B_0^* + B_{-1}\zeta_1^{-1} + B_{-2}\zeta_1^{-2} + B_{-3}\zeta_1^{-3} + \dots + B_{-n}\zeta_1^{-n} + \dots, \quad (1.7)$$

где $B_0^* = -a$, а $B_{-n} = a^{n-1}(1 - a\bar{a})$ ($n = 1, 2, \dots$).

Внося (1.7) в (1.5) и полагая при этом, что $B_0 + B_0^* = 0$, что всегда возможно, окончательно получим:

$$z = \Omega_1(\zeta_1) = D \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-k} \zeta_1^{-k} \right). \quad (1.8)$$

Функция (1.8), определенная в кольце $|a| < |\zeta_1| \leq 1$, конформно отображает концентрическое кольцо $r_0 \leq |\zeta_1| \leq 1$, где $r_0 > |a|$, на двусвязную область, ограниченную кривыми Γ и Γ_2 , являющимися образами соответственно окружностей $|\zeta_1| = 1$ и $|\zeta_1| = r_0$. При $\zeta_1 = a$ эта функция имеет особенность. В практических целях в качестве отображающей функции двусвязной области удобно в функции (1.8) ограничиться полиномом, образованным первыми n_1 несколькими членами правильной и n_2 первыми несколькими членами главной частей ряда (1.8), причем число n_2 непосредственно зависит от радиуса r_0 .

2. Решение задачи свободного кручения призматического стержня двусвязного поперечного сечения сводится к отысканию функции напряжений $\Psi(x, y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6)

$$\Delta \Psi = -2 \quad (2.1)$$

из следующих граничных условий

$$\begin{aligned} \text{на } \Gamma_2 \quad \Psi &= 0, \\ \text{на } \Gamma \quad \Psi &= C, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где C — постоянная, подлежащая определению.

Представим функцию напряжений $\Psi(x, y)$ в комплексном виде

$$\Psi = -\frac{i}{2} [\Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} - iz\bar{z}], \quad (2.3)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$; $\Phi_1(z)$ — комплексная функция кручения.

Пусть полином

$$z = \omega(\zeta) = D \left(\sum_{k=1}^{n_2} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{n_1} D_{-k} \zeta^{-k} \right), \quad \text{где } \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

составленный из первых n_1 членов правильной и n_2 первых членов главной частей ряда (1.8), в котором предварительно сделано преоб-

разование $\zeta_1 = \frac{1}{\zeta}$ и введены обозначения

$$B_k = D_{-k}, \quad B_{-k} = D_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

отображает кольцо $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$ на двусвязную область, ограниченную извне кривой Γ_2 , являющейся на плоскости z образом $|\zeta| = \rho_2$, а изнутри образом $|\zeta| = 1$ — кривой Γ .

Подставив (2.4) в (2.2), получим:

$$\Psi = -\frac{i}{2} [\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - i\omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}]. \quad (2.6)$$

Голоморфную в области кольца $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$ функцию $\Phi(\zeta)$ будем искать в виде:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \text{где } a_k = b_k + ic_k. \quad (2.7)$$

Произведение $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$, фигурирующее в (2.6) на линиях $\rho = \text{const}$ разложим в ряд Фурье

$$\frac{i}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad (2.8)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2} |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2} (P_k^2 + Q_k^2) \rho^{2k} + \sum_{k=1}^{n_1} (P_{-k}^2 + Q_{-k}^2) \rho^{-2k} \right],$$

$$\alpha_1 = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-1} (P_k P_{k+1} + Q_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} (P_{-k} P_{-k-1} + Q_{-k} Q_{-k-1}) \rho^{-(2k+1)} \right],$$

$$\alpha_n = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n} (P_k P_{k+n} + Q_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \sum_{k=1}^{n_1-n} (P_{-k} P_{-k-n} + Q_{-k} Q_{-k-n}) \rho^{-(2k+n)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} P_{-k} + Q_{n-k} Q_{-k}) \rho^{n-2k} \right];$$

($n = 2, 3, \dots, N$)

$$\beta_1 = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-1} (Q_k P_{k+1} - P_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} (P_{-k} Q_{-k-1} - Q_{-k} P_{-k-1}) \rho^{-(2k+1)} \right],$$

$$\beta_n = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n} (Q_k P_{k+n} - P_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \right.$$

$$+ \sum_{-1}^{n_1-n} (P_{-k} Q_{-k-n} - Q_{-k} P_{-k-n}) \rho_2^{-(2k+n)} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} Q_{-k} + Q_{n-k} P_{-k}) \rho_2^{n-2k} \Big];$$

$$(n = 2, 3, \dots, N),$$

здесь $D_k = P_k + iQ_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) и $N = n_1 + n_2$.

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты α_n и β_n будут снабжены сверху индексом (1), а при $\rho = \rho_2$ — индексом (2).

Подставив (2.7) в (2.6), с учетом (2.8), и удовлетворяя граничные условия (2.2), получим:

$$b_k = \frac{\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_k = \frac{\alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \\ b_{-k} = \frac{\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} \rho_2^k}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k^{(1)} \rho_2^k - \alpha_k^{(2)}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad (2.9)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$.

Для остальных $k > N$ $b_k = b_{-k} = c_k = c_{-k} = 0$. Входящая в (2.2) постоянная C и коэффициент a_0 , не влияющие на напряженное состояние, равны $C = \alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}$, $a_0 = i\alpha_0^{(2)}$.

3. Крутящий момент, приложенный к основаниям стержня, равен

$$M = \tau K, \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, K — жесткость при кручении.

Известно (6), что

$$K = \frac{\mu}{8i} \int_{\gamma} \bar{\omega}(\sigma)^2 \omega(\sigma) d\omega(\sigma) - \frac{\mu}{8i} \int_{\gamma} \omega(\sigma)^2 \bar{\omega}(\sigma) d\bar{\omega}(\sigma) - \\ - \frac{\mu}{4} \int_{\gamma} \{\Phi(\sigma) + \bar{\Phi}(\sigma)\} d\omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma), \quad (3.2)$$

где интегрирование производится при движении в положительном направлении по всему контуру кольца γ , μ — модуль сдвига, σ — граничное значение переменной ζ .

Разлагая в (3.2) подынтегральные выражения в ряд по степеням σ и учитывая при этом, что на границе γ , где $\sigma = \rho_j^2$ ($j=1, 2$), выполняются следующие равенства

$$\omega(\sigma) \bar{\omega}\left(\frac{\rho_j^2}{\sigma}\right) = \sum_{-N}^N \lambda_n^{(j)} \sigma^n,$$

где

$$\lambda_0^{(j)} = 2\alpha_0^{(j)}, \quad \lambda_n^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} - i\beta_n^{(j)}) \rho_j^{-n}, \quad \lambda_{-n}^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} + i\beta_n^{(j)}) \rho_j^n; \quad (3.3)$$

$$\bar{\omega} \left(\frac{\rho_j^2}{\sigma} \right) \omega'(\sigma) = \sum_{-(N+1)}^{N-1} A_n^{(j)} \sigma^n,$$

где

$$A_0^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-1} (k+1) \bar{D}_k D_{k+1} \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+1)} \rho_j^{-2(k+1)} \right],$$

$$A_n^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n-1} (k+n+1) \bar{D}_k D_{k+n-1} \rho_j^{2k} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n_1-n-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+n+1)} \rho_j^{-2(k+n+1)} + \sum_{k=1}^n k D_k \bar{D}_{-(n-k+1)} \rho_j^{-2(n-k+1)} \right]$$

$$[n = 1, 2, \dots (N-1)]$$

$$A_{-1}^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2} k D_k \bar{D}_k \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1} k D_{-k} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right],$$

$$A_{-2}^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-1} k D_k \bar{D}_{k+1} \rho_j^{2(k+1)} - \sum_{k=1}^{n_1-1} (k+1) D_{-(k+1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right]$$

$$A_{-n}^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n+1} k D_k \bar{D}_{k+n-1} \rho_j^{2(k+n-1)} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n_1-n+1} (k+n-1) D_{-(k+n-1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} - \sum_{k=1}^{n-2} k D_{-k} \bar{D}_{n-k-1} \rho_j^{2(n-k-1)} \right],$$

$$[n = 3, 4, \dots (N+1)]. \quad (3.4)$$

после интегрирования получим:

$$K = \frac{\mu\pi}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) - \sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(1)} A_{-n-1}^{(1)} + \lambda_{-n-1}^{(1)} A_n^{(1)}) \right] + \\ + \mu\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(2)} - a_n \lambda_{-n}^{(2)}) - \sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(1)} - a_n \lambda_{-n}^{(1)}) \right] \quad (3.5)$$

Касательные напряжения, как известно (6), определяются по формуле:

$$\tau_p - i\tau_\theta = \mu\tau \frac{\zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} [\Phi'(\zeta) - i \overline{\omega(\zeta)} \omega(\zeta)]. \quad (3.6)$$

4. В качестве примера рассмотрим задачу кручения цилиндра, ограниченного извне кривой, близкой к окружности, а изнутри — криволинейным квадратом, центр которого не совпадает с центром окружности. В качестве исходной функции (1.1) ограничимся полиномом

$$z = D \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{6} \omega^3 \right). \quad (4.1)$$

Эта функция, как известно, переводит окружность $|\omega| = R \leq 0,5$ в кривую Γ_1 , близкую к окружности, а окружность $|\omega| = 1$ — в квадрат с закругленными углами.

Примем в (1.2) параметр $\alpha = 0,2$ и в (1.1) коэффициент D действительным. Подставив (1.2) в (4.1), с учетом (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) и (2.5), и в качестве внешней границы Γ_2 (рис. 1) принимая образ окружности $|\zeta| = 2$, ограничимся следующим полиномом в отображающей функции (1.8):

$$z = \omega(\zeta) = D \left(\sum_{k=1}^{n_2=8} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{n_1=8} D_{-k} \zeta^{-k} \right), \quad (4.2)$$

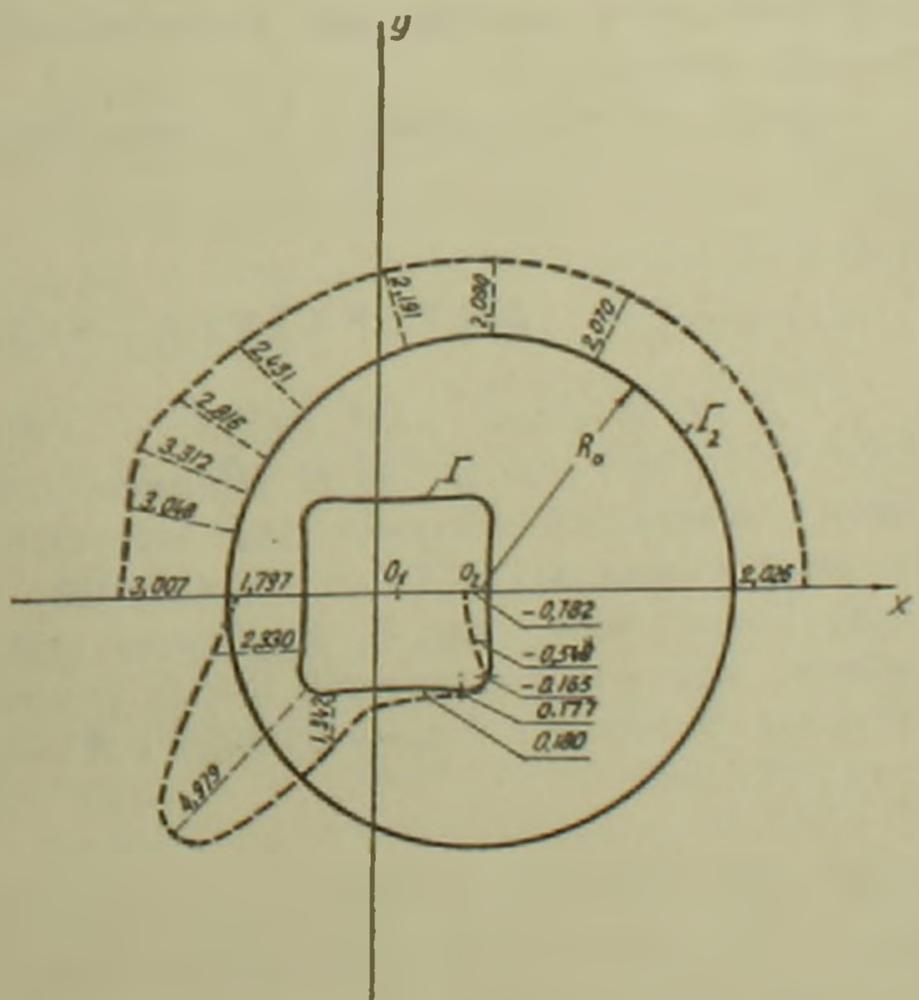
где

$D_1 = 0,96$	$D_{-1} = -0,019\ 201$
$D_2 = 0,192$	$D_{-2} = 0,088\ 319$
$D_3 = 0,038\ 4$	$D_{-3} = -0,111\ 362$
$D_4 = 0,007\ 679$	$D_{-4} = -0,077\ 567$
$D_5 = 0,001\ 536$	$D_{-5} = -0,032\ 471$
$D_6 = 0,000\ 307$	$D_{-6} = -0,011\ 065$
$D_7 = 0,000\ 061$	$D_{-7} = -0,003\ 363$
$D_8 = 0,000\ 011$	$D_{-8} = -0,001\ 842.$

Как видно из построения, с помощью (4.2), по дискретным точкам, кривая Γ представляет собой квадрат с закругленными углами и почти прямыми сторонами с центром в точке $O_1 (0,189\ 07D, 0)$, чего и следовало ожидать, так как полином (4.2) на $|\zeta| = 1$ приближенно, но с высокой точностью аппроксимирует функцию (4.1) на $|\omega| = 1$.

Убедимся в том, что кривая Γ_2 близка к окружности. Действительно, дискретные точки располагаются по Γ_2 — близкой к окружности радиуса $R_0 = 2,259\ 6 D$ с центром в точке $O_2 (0,930\ 37 D, 0)$. За центр круга принята середина отрезка действительной оси, отсекаемого пересечением Γ_2 с этой осью. Расстояния от центра до 10 дискретных точек, расположенных в верхней полуплоскости, отличаются от R_0 не более чем на 1,3%.

С другой стороны на окружности $|\zeta| = 2$ удовлетворяется условие выпуклости кривой Γ_2 (?)



Фиг. 1.

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\zeta \omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + 1 \geq 0. \quad (4.3)$$

Следовательно, кривая Γ_2 близка к окружности.

Жесткость рассматриваемого поперечного сечения стержня, со- считанная по (3.5), равна $K = 11,79555 \mu \pi D^4$.

Принимая за сторону квадрата Γ отрезок действительной оси, отсекаемый кривой Γ от этой оси, получаем, что $D = 0,59318 a$ (a — сторона квадрата); следовательно, $R_0 = 1,34034 a$.

Эпюры касательных напряжений τ_0 по контурам сечения приве- дены на фиг. 1.

В заключение отметим, что выбор полинома (4.1) из двух сла- гаемых продиктован ничуть не стремлением избежать отягчающих расчетов, а только лишь с целью иллюстрации способа; при желании число слагаемых в (4.1) можно известным образом увеличить, что приведет к уменьшению радиуса закругления в углах квадрата.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

Ոչ համառանցք բազմանիս խողովակի ունեցող երկանցիկ զլանի ոլորումը

Դիտարկվում է երկկապ լայնական կտրվածք ունեցող զլանի ոլորման խնդիրը, որի ներսի եզրը իրենից ներկայացնում է կտրացված անկյուններով բազմանկյունի, իսկ արտաքին եզրը՝ ներքին եզրի նկատմամբ կամայական դասավորությամբ ունեցող շրջանա- ղծին բազմանանջափ մոտ կոր:

Երկկապ տիրույթների համար առաջարկվում է կոնֆորմ արտապատկերող ֆունկ- ցիայի կառուցման եղանակ, որը համակենտրոն օղակը արտապատկերում է զիտարկվող տիրույթի վրա:

Որպես օրինակ լուծված է ոչ համառանցք բառակուսի խողովակի զլանի ոլորման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. XIII, № 5 (1948). ² Д. И. Шерман, ИАН СССР, ОТН, № 7 (1951). ³ Д. И. Шерман, Труды Всесоюзного съезда по теорети- ческой и прикладной механике, Изд. АН СССР, М.—Л., 1962. ⁴ Ю. А. Амензаде, Ин- женерный журнал АН СССР, т. III, в. 2, 1963. ⁵ М. И. Найман, Докторская диссер- тация, Госуд. библ. им. В. И. Ленина, 1947. ⁶ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М., 1954. ⁷ И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Госиздат физ.-мат. литер., М., 1960.