ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVIII 1964 4

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, академик АН Армянской ССР, и С. А. Акопян

К теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг—Лефлера

(Представлено 6/III 1964)

В работе [1] была развита теория особых интегральных преобразований, ядром для которых служит функция типа Миттаг—Лефлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}. \tag{1}$$

Один из основных результатов этой теории может быть сформулирован в виде следующей теоремы, являющейся дальнейшим существенным обобщением теоремы Планшереля о преобразовании Фурье в классе $L_2(0, \infty)$.

Теорема А. *Пусть параметры* ρ *и* μ *удовлетворяют условиям*

$$\rho \geqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \tag{2}$$

и $g(y)$ *произвольная функция из класса* $g(y)\, y^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *В предположении, что*

$$\arg\{ix\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \textit{при} \quad x \in (0, \infty) \\ -\frac{\pi}{2}, & \textit{при} \quad x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

на полуоси $(0, \infty)$ *имеем*

$$g(y)\, y^{\mu-1} = \underset{\sigma\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi\rho}\, y^{\mu-1} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_\rho\left(y^{\frac{1}{\rho}} (ix)^{\frac{1}{\rho}}; \mu\right) (ix)^{\mu-1} f(x)\, dx, \tag{3}$$

где на всей оси $(-\infty, \infty)$

$$f(x)=\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{0}^{\sigma}e^{-ixy}g(y)\,y^{\mu-1}dy. \tag{4}$$

2°. *При дополнительном условии* $\rho\geqslant 1$ *для любого значения* $\varphi\in\left[\frac{\pi}{\rho},\ 2\pi-\frac{\pi}{\rho}\right]$ *на полуоси* $(0,\ +\infty)$ *имеет место также равенство*

$$\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ y^{\mu-1}\int_{-\sigma}^{\sigma}E_{\rho}\left(y^{\frac{1}{\rho}}(ix)^{\frac{1}{\rho}}e^{i\varphi};\ \mu\right)(ix)^{\mu-1}f(x)\,dx=0. \tag{5}$$

В дальнейшем было установлено ([2]), что функции типа

$$x^{\mu-1}E_{\rho}\left(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\ \mu\right)$$

являются решениями специальных краевых задач на полуоси $(0,+\infty)$, аналогичных сингулярной краевой задаче Штурма—Лиувилля, но для определенного оператора содержащей операции дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля.

В свете этого факта утверждение 1° теоремы А может быть рассмотрено как теорема разложения для сингулярной краевой задачи такого рода, в специальных случаях напоминающей случаи cos или sin интегралов Фурье—Планшереля.

В настоящей статье устанавливается обобщение теоремы А, соответствующее общему случаю сингулярной краевой задачи для оператора дробного порядка. Вид этого оператора и условия в нуле мы здесь записывать не будем, отсылая читателя к уже цитированной работе ([2]). Отметим лишь, что установленный здесь результат (теорема 1) является естественным обобщением и аналогом хорошо известного примера ([3]) разложения для сингулярной краевой задачи

$$y''-\lambda y=0,$$

$$y(0)=\sin\alpha,\quad y'(0)=-\cos\alpha,$$

когда в зависимости от знака $\mathrm{ctg}\,\alpha$ к интегралу типа Фурье прибавляется также дискретный член, соответствующий отрицательному собственному значению.

1°. *Предварительные обозначения и леммы.* Пусть параметры ρ и μ такие, что

$$\rho\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho}. \tag{1.1}$$

Полагая, что

$$\arg\{i\lambda\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{при} \quad \lambda \in (0, \infty) \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{при} \quad \lambda \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

введем в рассмотрение следующие функции

$$\Psi^{(\pm)}(x; \lambda) = \left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{\lambda} e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}} \right) e^{\pm i\lambda x}, \tag{1.2}$$

$$\Phi^{(\pm)}(x; \lambda) = \sin\alpha\,(\pm i\lambda)^{\mu-1} x^{\mu-1} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{\rho}}; \mu\right) -$$

$$- \frac{\cos\alpha}{\lambda} e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}} (\pm i\lambda)^{\mu+\frac{1}{2\rho}-1} x^{\mu+\frac{1}{2\rho}-1} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{\rho}}; \mu + \frac{1}{2\rho}\right), \tag{1.3}$$

а также функцию

$$\Omega(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 \sin^2\alpha - \lambda \sin 2\alpha \cos\frac{\pi}{4\rho} + \cos^2\alpha}. \tag{1.4}$$

Обозначив далее

$$\Omega_1^{(\pm)}(\lambda) = \sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{\lambda} e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}}, \qquad \Omega_2^{(\pm)}(\lambda) = \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\lambda} e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}}, \tag{1.5}$$

имеем

$$\Psi^{(\pm)}(x; \lambda) = \Omega_1^{(\pm)}(\lambda) e^{\pm i\lambda x}, \tag{1.6}$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{\Omega_1^{(+)}(\lambda)\,\Omega_1^{(-)}(\lambda)} = \frac{1}{|\Omega_1^{(\pm)}(\lambda)|^2}. \tag{1.7}$$

Воспользуясь теперь тождествами

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{2}\left[E_{2\rho}(z^{\frac{1}{2}}; \mu) + E_{2\rho}(-z^{\frac{1}{2}}; \mu)\right]$$

и (1.8)

$$E_\rho\left(z; \mu + \frac{1}{2\rho}\right) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2}\left[E_{2\rho}(z^{\frac{1}{2}}; \mu) - E_{2\rho}(-z^{\frac{1}{2}}; \mu)\right],$$

которые легко вытекают из определения функции Миттаг—Лефлера, из (1.3) получим

$$\Phi^{(\pm)}(x; \lambda) = \frac{1}{2}\Omega_1^{(\pm)}(\lambda)(\pm i\lambda)^{\mu-1} x^{\mu-1} E_{2\rho}\left(x^{\frac{1}{2\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Omega_2^{(\pm)}(\lambda)(\pm i\lambda)^{\mu-1} x^{\mu-1} E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}} (\pm i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}}; \mu\right). \tag{1.9}$$

Отметим еще, что

$$\Omega_1^{(\pm)}\left(e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)=0, \tag{1.10}$$

и

$$\Omega_2^{(\pm)}\left(e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)=2\sin\alpha. \tag{1.11}$$

Отнесем теперь к классу $L_2^{(\Omega)}(-\infty, \infty)$ функции $F(\lambda)$, определенные на всей оси $(-\infty, \infty)$, для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,\Omega(\lambda)\,d\lambda \tag{1.12}$$

существует.

Лемма 1. *Если $x^{\mu-1}f(x)\in L_2(0, \infty)$, то существуют функции $F^{(\pm)}(\lambda)\in L_2^{(\Omega)}(-\infty, \infty)$ такие, что интегралы*

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)=\int_0^{\sigma}t^{\mu-1}f(t)\,\Psi^{(\pm)}(t;\lambda)\,dt \qquad (\sigma>0) \tag{1.13}$$

сходятся к $F^{(\pm)}(\lambda)$ в метрике пространства $L_2^{(\Omega)}$.

Доказательство. Если обозначить

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma)=\int_0^{\sigma}e^{\pm i\lambda t}f(t)\,t^{\mu-1}dt, \tag{1.14}$$

то по теореме Планшереля существуют пределы в среднем в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda)=\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma). \tag{1.15}$$

Из (1.6), (1.13) и (1.15) имеем

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma)=\Omega_1^{(\pm)}(\lambda)\,\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma), \tag{1.16}$$

откуда в силу (1.7) вытекает равенство

$$|F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_1)-F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_2)|^2\,\Omega(\lambda)=|\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma_1)-\Phi^{(\pm)}(\lambda, \sigma_2)|^2. \tag{1.17}$$

Из существования пределов в среднем (1.15) и из (1.7) заключаем, что

$$\lim_{\sigma_1, \sigma_2\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_1)-F^{(\pm)}(\lambda, \sigma_2)|^2\,\Omega(\lambda)\,d\lambda=0, \tag{1.18}$$

откуда следуют существование функции $F^{(\pm)}(\lambda)\in L_2^{(\Omega)}(-\infty, \infty)$ и равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F^{(\pm)}(\lambda)-F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)|^2\,\Omega(\lambda)\,d\lambda=0, \tag{1.19}$$

т. е. утверждение леммы.

Отметим также, что из (1.15) и (1.16) следует, что

$$F^{(\pm)}(\lambda) = \Omega_1^{(\pm)}(\lambda)\,\Phi^{(\pm)}(\lambda), \tag{1.20}$$

где

$$\Phi^{(\pm)}(\lambda) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^{\sigma} e^{\pm i\lambda t} f(t)\, t^{\mu-1} dt. \tag{1.21}$$

Лемма 2. *Справедливы следующие формулы.*

а) *при* $\operatorname{ctg}\alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)}{\lambda - e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha} (\mp i\lambda)^{\mu-1}\,\Phi^{(\pm)}(\lambda)\, d\lambda = 0, \tag{1.22}$$

б) *при* $\operatorname{ctg} > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)}{\lambda - e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha} (\mp i\lambda)^{\mu-1}\,\Phi^{(\pm)}(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \pm 2\pi i \left(\mp i e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right) E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}\left(\mp i e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\frac{1}{2\rho}},\ \mu\right). \tag{1.23}$$

Лемма доказывается при помощи контурного интегрирования с использованием того факта [1], что при $\rho > \frac{1}{2}$ и $|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}$,

$$E_\rho(z;\ \mu) = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

2°. *Обобщенные преобразования в классах* $L_2(0,\infty)$ *и* $L_2^{(\Omega)}(-\infty,\infty)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $f(x)$ — *произвольная функция из класса* $f(x)\,t^{\mu-1} \in L_2(0,\infty)$, *то существуют функции* $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(\Omega)}(-\infty,\infty)$, *такие, что интегралы*

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} \Psi^{(\pm)}(t;\ \lambda) f(t)\, t^{\mu-1} dt \quad (\sigma > 0) \tag{2.1}$$

сходятся к $F^{(\pm)}(\lambda)$ *в смысле*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\pm)}(\lambda) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma)|^2\, \Omega(\lambda)\, d\lambda = 0, \tag{2.2}$$

а) *при* $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$

$$x^{\mu-1}f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(+)}(\lambda)\,\Phi^{(-)}(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(-)}(\lambda)\,\Phi^{(+)}(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda, \tag{2.3}$$

б) *при* $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$x^{\mu-1}f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(t)\,\Phi^{(\mp)}(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda \pm$$

$$\pm \frac{1}{i\rho}\underset{\lambda = e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha}{\mathrm{Res}} F^{(\pm)}(\lambda)\,\Phi^{(\mp)}(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda). \tag{2.4}$$

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы была доказана выше (лемма 1). Переходим к доказательству второй части. Замечая, что

$$\frac{\Omega_2^{(\mp)}(\lambda)}{\Omega_1^{(\mp)}(\lambda)} = 1 + \frac{2\operatorname{ctg}\alpha e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}}{\lambda - \operatorname{ctg}\alpha e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}},$$

из (1.7), (1.9) и (1.1) получим

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda)\,\Phi^{(\mp)}(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}x^{\mu-1}\int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho}\left(x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)(\mp i\lambda)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2}x^{\mu-1}\int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)(\mp i\lambda)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \operatorname{ctg}\alpha e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}x^{\mu-1}\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)}{\lambda - \operatorname{ctg}\alpha e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}}(\mp i\lambda)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}(\lambda)\,d\lambda. \tag{2.5}$$

По теореме А из (1.21) имеем

$$f(x)\,x^{\mu-1} = \frac{1}{4\pi\rho}\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ x^{\mu-1}\int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho}\left(x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)(\mp i\lambda)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}(\lambda)\,d\lambda. \tag{2.6}$$

Взяв в (5) $\varphi = \pi$ и заменив ρ через $2\rho (> 1)$, получим, что на полуоси $(0, +\infty)$

$$\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, x^{\mu-1}\int_{-\sigma}^{\sigma} E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}(\mp i\lambda)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right)(\mp i\lambda)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}(\lambda)\,d\lambda = 0. \qquad (2.7)$$

а) Если $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ из (2.5) в силу (2.6), (2.7) вытекает утверждение (2.3) теоремы. Если же $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, то утверждение (2.3) следует из леммы 2 и из (2.6), (2.7).

б) Пусть $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; тогда по лемме 2 имеем

$$\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda)\,\Phi^{(\mp)}(x;\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda = 2\pi\rho x^{\mu-1}f(x) \pm$$

$$\pm\, 2\pi i \operatorname{ctg}\alpha\, e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}} x^{\mu-1}\left(\mp i e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\mu-1}\Phi^{(\pm)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)\times$$

$$\times E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}\left(\mp i e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right). \qquad (2.8)$$

Из (1.9), (1.10), (1.11) следует тождество

$$x^{\mu-1}\left(\mp i e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\mu-1}E_{2\rho}\left(-x^{\frac{1}{2\rho}}\left(\mp i e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\frac{1}{2\rho}};\ \mu\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\Phi^{(\mp)}\left(x;\ e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right). \qquad (2.9)$$

Кроме того, из (1.20) вытекает

$$\Phi^{(\pm)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right) = \frac{F^{(\pm)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)}{\Omega_1^{(\pm)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)}, \qquad (2.10)$$

и легко проверить, что

$$\lim_{\lambda\to e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha}\left\{\lambda - e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)\Omega(\lambda) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha}{\Omega_1^{(\pm)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha\right)\sin\alpha}. \qquad (2.11)$$

Ввиду формул (2.9), (2.10). (2.11) из (2.8) следует утверждение (2.4) теоремы. Теорема полностью доказана.

В специальном случае, когда $\rho = \frac{1}{2}$ и $\mu = 1$, из теоремы 1 следует известный пример ([3]) разложения, связанный с краевой задачей

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = \sin\alpha, \quad y'(0) = -\cos\alpha.$$

Действительно, теперь будем иметь

$$\Phi^{(+)}(x;\ \lambda) = \Phi^{(-)}(x;\ \lambda) \equiv \Phi(x;\ \lambda) = \sin\alpha\cos\lambda x - \frac{\cos\alpha}{\lambda}\sin\lambda x,$$

$$\Psi^{(\pm)}(x;\lambda) = \left(\sin\alpha \pm i\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)e^{\pm i\lambda x},$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

причем

$$\frac{1}{2}[\Psi^{(+)}(x;\ \lambda) + \Psi^{(-)}(x;\ \lambda)] = \Phi(x;\ \lambda).$$

Поэтому если составить интеграл

$$F(\lambda,\ \sigma) = \int_0^\sigma \Phi(x;\ \lambda)f(x)\,dx = \frac{1}{2}[F^{(+)}(\lambda,\ \sigma) + F^{(-)}(\lambda,\ \sigma)],$$

то можем утверждать, что существует функция

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}[F^{(+)}(\lambda) + F^{(-)}(\lambda)] \in L_2^{(\Omega)}(-\infty,\ \infty)$$

такая, что

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda,\ \sigma) - F(\lambda)|^2\,\Omega(\lambda)\,d\lambda = 0$$

а) при $\operatorname{ctg} \leqslant 0$

$$f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda,$$

б) при $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{i}\operatorname*{Res}_{\lambda=i\operatorname{ctg}\alpha}F^{(+)}(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda) - \frac{1}{i}\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\operatorname{ctg}\alpha}F^{(-)}(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda).$$

Но

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\pm i\operatorname{ctg}\alpha}F^{(\mp)}(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda) = 0.$$

Поэтому получим

$$f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{2}{i}\operatorname*{Res}_{\lambda=i\operatorname{ctg}\alpha}F(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda) - \frac{2}{i}\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\operatorname{ctg}\alpha}F(\lambda)\,\Phi(x;\ \lambda)\,\Omega(\lambda).$$

Принимая во внимание, что

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\pm i\operatorname{ctg}\alpha} F(\lambda)\,\Phi(x;\lambda)\,\Omega(\lambda)=$$

$$=\mp\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2i\sin^2\alpha}\,\Phi(x;\pm i\operatorname{ctg}\alpha)\,F(\pm i\operatorname{ctg}\alpha)=$$

$$=\mp\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2i}\,e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}f(x)\,dx,$$

окончательно получим, что при $\operatorname{ctg}\alpha>0$

$$f(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(\lambda)\,\Phi(x;\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+2\operatorname{ctg}\alpha\, e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}f(x)\,dx.$$

Отсюда заменой переменной $\lambda^2=\mu$ и в силу четности функции $F(\lambda)$ приходим к известному примеру (3).

Отметим, что имеет место также обратная теорема, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема 2. *Если $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(0,\infty)$, то существуют функции $F^{(\pm)}(\lambda)\in L_2^{(\Omega)}(-\infty,\infty)$, такие, что интегралы*

$$F^{(\pm)}(\lambda,\sigma)=\int_0^\sigma f(t)\,\Phi^{(\pm)}(t;\lambda)\,dt\qquad(\sigma>0)$$

сходятся к $F^{(\pm)}(\lambda)$ в смысле

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F^{(\pm)}(\lambda)-F^{(\pm)}(\lambda,\sigma)|^2\,\Omega(\lambda)\,d\lambda=0$$

а) *при* $\operatorname{ctg}\alpha\leqslant 0$

$$f(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\sigma}^{\sigma}F^{(\pm)}(\lambda)\,\Psi^{(\mp)}(x;\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda,$$

б) *при* $\operatorname{ctg}\alpha>0$

$$f(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi\rho}\int_{0}^{\sigma}F^{(\pm)}(\lambda)\,\Psi^{(\mp)}(x;\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\pm$$

$$\pm\frac{1}{i\rho}\operatorname*{Res}_{\lambda=e^{\mp i\frac{\pi}{4\rho}}\operatorname{ctg}\alpha}F^{(\pm)}(\lambda)\,\Psi^{(\mp)}(x;\lambda)\,\Omega(\lambda).$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Միտտագ-Լեֆլերի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության շուրջը

Ենթադրելով, որ $\Psi^{(\pm)}(x, \lambda)$, $\Phi^{(\pm)}(x; \lambda)$ *և* $\Omega(\lambda)$ *ֆունկցիաները որոշվում են* (1.2), (1.3) *և* (1.4) *բանաձևերով, իսկ* ρ *և* μ *պարամետրերը բավարարում են*

$$\rho \geqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$$

պայմաններին, աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ հիմնական թեորեմը։

Թեորեմ. Երբ $f(x)$-ը կամայական ֆունկցիա է $f(x)\,x^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$ դասից, ապա գոյություն ունեն $F^{(\pm)}(\lambda) \in L_2^{(\Omega)}(-\infty, \infty)$ ֆունկցիաները այնպես, որ

$$F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) = \int_0^{\sigma} \Psi^{(\pm)}(t; \lambda) f(t)\, t^{\mu-1}\, dt \qquad (\sigma > 0)$$

ինտեգրալները համապատասխանաբար զուգամիտում են այդ ֆունկցիաներին հետևյալ իմաստով

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{(\pm)}(\lambda) - F^{(\pm)}(\lambda, \sigma) \right|^2 \Omega(\lambda)\, d\lambda = 0,$$

ըստ որում $(0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա իրավացի են նաև հետևյալ շրջման բանաձևերը

ա) երբ $\operatorname{ctg} \alpha < 0$

$$x^{\mu-1} f(x) = \underset{\sigma \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda)\, \Phi^{(\mp)}(x; \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda,$$

բ) երբ $\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$x^{\mu-1} f(x) = \underset{\sigma \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-\sigma}^{\sigma} F^{(\pm)}(\lambda)\, \Phi^{(\mp)}(x; \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda \pm$$

$$\pm \frac{1}{i\rho} \underset{\lambda = e^{\pm i \frac{\pi}{4\rho}} \operatorname{ctg} \alpha}{\mathrm{Res}} F^{(\pm)}(\lambda)\, \Phi^{(\mp)}(x; \lambda)\, \Omega(\lambda).$$

Հատուկ դեպքում, երբ $\rho = \frac{1}{2}$; $\mu = 1$ *այս թեորեմն իր մեջ, որպես մասնավոր դեպք պարունակում է*

$$y'' = \lambda y = 0$$

$$y(0) = \sin \alpha, \quad y'(0) = -\cos \alpha$$

եզրային խնդրի հետ կապված հայտնի վերլուծությունը ([3])։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР, сер. матем., 19 (1955), 133—190. [2] *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*, Труды Московского математического общества, т. 10. 89—179. [3] *Э. Ч. Титчмарш*, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. I, гл. IV, М., 1960.