

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

О некоторых граничных свойствах функций,
аналитических в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/1 1964)

1°. *Предельные свойства.* Будем рассматривать ограниченные голоморфные функции следующего вида

$$B(z; \{a_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z; a_n),$$

где

$$b(z; a) = \frac{|a|}{a} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}, \quad (1)$$

$$0 < |a_n| < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty. \quad (3)$$

$B(z; \{a_n\})$ называется произведением Бляшке, а последовательность $\{a_n\}$, которая удовлетворяет условиям (2) и (3), — последовательностью Бляшке. Функция $B(z; \{a_n\})$ называется подпроизведением для $B(z; \{a_n\})$, если $\{a_{n_k}\}$ подпоследовательность для $\{a_n\}$.

Известно, что произведение Бляшке имеет радиальные предельные значения с модулем единица почти всюду на $C = \{z : |z| = 1\}$. Тогда в точках, где существуют радиальные граничные значения, будут существовать и угловые пределы (1).

Мы рассмотрим вопрос о касательных пределах для произведения Бляшке. Прежде дадим хорошо известное определение касательного предела.

Пусть имеем множество точек z

$$R(m, \vartheta, \gamma) = \{z : 1 - |z| \geq m |\arg z - \vartheta|^\gamma; 0 < |z| < 1\},$$

где за $|\arg z - \vartheta|$ принимаем меньшую из дуг на C между $\frac{z}{|z|}$ и $e^{i\vartheta}$.

Если функция $f(z)$ определена на $D = \{z : |z| < 1\}$, мы скажем, что $f(z)$ имеет T_γ -предел в точке $e^{i\theta}$, если существует такое L , что для каждого m ($m > 0$), $f(z) \rightarrow L$ при $z \rightarrow e^{i\theta}$ и $z \in R(m, \theta, \gamma)$.

Легко видеть, что T_1 -предел существует в том и только в том случае, когда существует классический угловой предел. При $\gamma > 1$ ситуация изменяется. В работе (2) показано, что для каждого γ ($\gamma > 1$) существует произведение Бляшке, для которого не существует T_γ -предел нигде на S .

Вопросы о T_γ -пределах для произведений Бляшке рассмотрены в недавней работе Г. Карго (3). В частности, им получены следующие результаты.

Теорема А. Пусть $\{a_n\}$ последовательность Бляшке такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) / |e^{i\theta} - a_n|^\gamma < \infty \quad (4)$$

для некоторого фиксированного γ ($\gamma \geq 1$). Тогда $B(z; \{a_n\})$ и все его подпроизведения имеют T_γ -предел с модулем единицы в точке $e^{i\theta}$.

Теорема В. Пусть $\{a_n\}$ последовательность Бляшке, для которой удовлетворяется (4) для некоторого фиксированного γ ($\gamma \geq 1$). Тогда, если $\gamma \geq 2k$ для некоторого целого положительного k , то производная порядка k от $B(z; \{a_n\})$ и от каждого подпроизведения $B(z; \{a_{n_k}\})$ имеет $T_{\gamma/2k}$ -предел в точке $e^{i\theta}$.

Мы здесь приведем одну теорему, которая является прямым обобщением другой теоремы Г. Карго и при $h(t) = t^\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) совпадает с ней.

Для формулировки этой теоремы нам понадобятся некоторые предварительные понятия.

Пусть $h(r)$ — непрерывная вещественная функция, не убывающая при $r \geq 0$ и $h(0) = 0$. Пусть E — произвольное ограниченное множество, покрытое некоторой последовательностью кругов $\{c_n\}_1^\infty$ с радиусами $\{r_n\}_1^\infty$. Определим меру

$$M_h(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} h(r_n)$$

для всех таких $\{c_n\}$.

Эта мера будет равна нулю в том и только в том случае, когда равна нулю соответствующая мера Хаусдорфа.

В работе (4) дано следующее определение выпуклой емкости, принадлежащей К. Темко.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность и $\lambda_n \rightarrow 0$, тогда

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos nx$$

неотрицательная и интегрируемая по Лебегу функция. Следовательно

$$Q(r, x) = \sum_0^{\infty} \lambda_n r^n \cos nx$$

как пуассоновская сумма от $Q(\lambda)$ удовлетворяет условию $Q(r, x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 2\pi$ и $0 \leq r < 1$.

Определение 1. Измеримое по Борелю множество $E \subset [0, 2\pi]$ имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если существует мера μ , сосредоточенная на E , для которой функция

$$v(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x-t) d\mu(t)$$

остаётся равномерно ограниченной по x при $r \rightarrow 1$.

В случае отсутствия такой меры μ , считаем [выпуклую емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равной нулю.

Определение 2. Условимся говорить, что непрерывная на $0 < t \leq 1$ функция $H(t) \geq 0$ принадлежит классу C_H , если $H(0) = \infty$,

$tH(t) \downarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, $\int_0^1 \frac{dt}{tH(t)} < \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(u) du = c$, где $c \neq 0, \infty$.

Докажем следующую лемму.

Лемма. Если $h(t) = \int_0^t H(u) du$ и множество B имеет $h(t^1)$

меру нуль $\gamma \geq 1$ и $h(t^1) \geq t$, то выпуклая емкость множества B относительно последовательности

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-1})}$$

равна нулю, если $H \in C_H$.

Доказательство. Пусть $\lambda(u) = \int_u^{\infty} \frac{du}{u^{2-\gamma} H(u^{-1})}$, тогда $\lambda_n \sim \lambda(n)$

и множества с нулевой выпуклой емкостью для этих последовательностей совпадают.

По теореме Салема ⁽⁴⁾ при $x \rightarrow 0$

$$Q(x) = \sum \lambda_n \cos nx \sim \int_0^{\frac{1}{x}} u |\lambda'(u)| du = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^{1-\gamma} H(u^{-1})} > \frac{1}{\gamma x^{\gamma} H(x^1)}.$$

В работе ⁽⁵⁾ доказано, что если для множества E мера $h(x^1) = \frac{1}{Q(x)}$ нуль, то емкость $\{\lambda_n\}$ тоже нуль. Так как $h(x^1) \geq \frac{c}{\gamma} \frac{1}{Q(x)}$,

то лемма доказана.

Будем предполагать, что для любого $0 < x, y \leq 1$ удовлетворяется следующее условие

$$h(xy) \leq ch(x)h(y). \quad (5)$$

Для этого достаточно, чтобы при предположении существования производных удовлетворялось условие

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \frac{1}{h(x)} \geq 0, \quad (6)$$

так как при условии (6) функция $\varphi(y) = \frac{h(xy)}{h(y)}$ получает свой максимум при $y = 1$.

При выполнении условия (5) скажем, что $h \in C_h$, если $H \in C_h$, где $h(x) = \int_0^x H(u) du$.

Теорема 1. Пусть $\{a_n\}$ последовательность Бляшке, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(1 - |a_n|) < \infty$$

для некоторого $h \in C_h$. Тогда для каждого $\gamma (\gamma \geq 1)$ и $h(t^\gamma) > t$ множество

$$E_\gamma = \left\{ e^{i\theta} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_n|)}{|e^{i\theta} - a_n|^\gamma} = \infty \right\}$$

имеет выпуклую емкость нуль относительно последовательности

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству Г. Карго для случая $h(t) = t^2$.

Пусть $\gamma \geq 1$ фиксированная. Для каждого n через O_n обозначим открытую дугу на S с центром в $\frac{a_n}{|a_n|}$ и длиной $(1 - |a_n|)^{1/\gamma}$. Пусть

$$G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} O_k$$

и $F_n = S - G_n$. Ясно, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ не имеют общих точек на S и их соединение совпадает с S . Пусть

$$E_\gamma \cap F_n = f_n \quad \text{и} \quad E_\gamma \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = G.$$

Докажем, что $h(t^\gamma)$ мера G равна нулю.

Так как

$$\bigcup_{k=N}^{\infty} O_k$$

покрывает $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ и для каждого N

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{\infty} h(1 - |a_k|) = 0,$$

то утверждение очевидно.

Теперь покажем, что $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$ емкость f_n равна

нулю.

Пусть $e^{i\theta}$ любая точка F_n для $k \geq n$

$$|e^{i\theta} - a_k| > \frac{1}{\pi} (1 - |a_k|)^{1/\gamma} \quad \text{или} \quad (1 - |a_k|) / |e^{i\theta} - a_k|^{\gamma} < \pi^{\gamma}.$$

Предположим, что λ_n емкость f_n больше нуля. Тогда существует такое единичное распределение $\mu(\vartheta)$ на f_n , что

$$\int_{f_n} \frac{d\mu(\vartheta)}{|e^{i\theta} - z|^{\gamma} H(|e^{i\theta} - z|^{\gamma})} < M$$

$M < \infty$ для всех z .

В частности, для $k \geq n$ будем иметь

$$\int_{f_n} \frac{1 - |a_k|}{|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma}} d\mu(\vartheta) \leq c \int_{f_n} \frac{h(1 - |a_k|)}{H(1 - |a_k|)} \frac{d\mu(\vartheta)}{|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma}} \leq$$

$$\leq ch(1 - |a_k|) \int_{f_n} \frac{H(|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma})}{H(1 - |a_k|) |e^{i\theta} - a_k|^{\gamma} H(|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma})} d\mu(\vartheta) \leq$$

$$\leq ch(1 - |a_k|) \int_{f_n} H\left(\frac{1 - |a_k|}{|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma}}\right) \frac{d\mu(\vartheta)}{h(|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma})} \leq c_0 h(1 - |a_k|).$$

Так что

$$\int_{f_n} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|)}{|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma}} \right\} d\mu(\vartheta) \leq c_0 \sum h(1 - |a_k|) < \infty,$$

которое противоречит условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|)}{|e^{i\theta} - a_k|^{\gamma}} = \infty$$

на f_n .

Имея в виду доказанную лемму, доказательство теоремы завершено.

Из сопоставления теоремы 1 с теоремами А и В получим теоремы 2 и 3.

Теорема 2. Пусть $\{a_n\}$ последовательность Бляшке, для которой

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty$$

для некоторого $h \in C_h$. Тогда для каждого $\gamma > 1$, $h(t^\gamma) \geq t$ есть

множество E_γ , выпуклая $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$ емкость которого

нуль, так что $B(z; \{a_n\})$, и все его подпроизведения имеют T_γ -предел с модулем единица в каждой точке $C - E_\gamma$.

При $\gamma = 1$ теорема получена в работе (5).

Теорема 3. Пусть $\{a_n\}$ последовательность Бляшке, для которой

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty,$$

для некоторого $h \in C_h$. Тогда для каждого $\gamma \geq 2k$, $h(t^\gamma) \geq t$, где k — целое положительное число, существует некоторое множество

E_γ , выпуклая $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$ емкость которого нуль, так что

производные от $B(z; \{a_n\})$ и от любого подпроизведения порядка k имеют $T_{\gamma/2k}$ -предел в каждой точке $C - E_\gamma$.

2°. О сегментном изменении. Говорят, что аналитическая в единичном круге функция имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\theta}$ при условии, что прямая, которая соединяет любую внутреннюю точку круга с точкой $e^{i\theta}$, отображается этой функцией на спрямляемую кривую.

В работе Г. Карго (6) доказано, что в точке $e^{i\theta}$ произведение Бляшке $B(z; \{a_n\})$ и любое его подпроизведение имеют конечное сегментное изменение в том и только в том случае, если выполняется условие (4). Имея в виду это утверждение и теорему 6 из [5], мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть последовательность Бляшке $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty,$$

для некоторого h , где $h' \in C_h$. Тогда $B(z; \{a_n\})$ и любое его подпроизведение имеет конечное сегментное изменение в каждой точке C , кроме, быть может, некоторого множества $\mathcal{D}$, внешняя h -хаусдорфовская мера которого нуль.

3°. Об одном классе голоморфных функций с конечным обобщенным интегралом Дирихле. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ аналитично в D и $f(0) = 0$, для которого

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(1-\rho) |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho d\theta < \infty, \quad (7)$$

где $h \in C_h$, тогда скажем, что $f \in S_h$.

Так как легко видеть, что

$$\int_0^1 h(1-\rho) \rho^{2n-1} d\rho = O\left(\frac{1}{n} h\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то условие (7) эквивалентно условию

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 H\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \quad (8)$$

В работе (5) показано, что произведения Бляшке $B_h(z)$, для которых

$$\sum_1^\infty h(1-|a_n|) < \infty, \quad (9)$$

принадлежат классам функций S_h .

Значит, если последовательность $\{a_n\}$ такая, что удовлетворяет условию (9), то существует функция f класса S_h с нулями на этой последовательности и $f \neq 0$.

Множество точек $\{a_n\}$, скажем, является множеством единственности для класса S_h , если из того, что $f(a_n) = 0$ и $f \in S_h$, вытекает, что $f \equiv 0$.

В работе (7) Г. Шапиро и А. Шильдса решен следующий вопрос: когда последовательность $\{a_n\}$ будет множеством единственности для функций класса S_h при $h(t) = t^\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), и получен исчерпывающий ответ. Но для более общего случая, когда в (8) вместо $H\left(\frac{1}{n}\right)$

стоят почти произвольные коэффициенты c_n , вопрос не решен.

Легко видеть, что для классов S_h доказательство приведенное в (7), полностью проходит, и мы получим следующую теорему.

Теорема 5. Если $\varphi(t)$ некоторая непрерывная функция, для которой $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ ($t > 0$), то существует множество единственности $\{a_n\}$ для класса S_h , удовлетворяющее условию

$$\sum_1^\infty h(1-|a_n|) \varphi(1-|a_n|) < \infty.$$

Շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային որոշ հատկությունները

Ենթադրենք ունենք z կետերի հետևյալ բազմությունը

$$R(m, \vartheta, \gamma) = \{z: 1 - |z| \geq m |\arg z - \vartheta|, 0 < |z| < 1\},$$

որտեղ որպես $|\arg z - \vartheta|$ ընդունում ենք C միավոր շրջանագծի վրա ընկած աղեղների փոքրագույնը, որը միացնում է z և $e^{i\vartheta}$ կետերը: Եթե $f(z)$ -ը որոշված է $|z| < 1$ շրջանում, կասենք, որ $f(z)$ -ը $e^{i\vartheta}$ կետում ունի T_γ -սահման, եթե կա այնպիսի L , որ ցանկացած $m(m > 0)$ համար $f(z) \rightarrow L$ երբ $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ և $z \in R(m, \vartheta, \gamma)$:

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թող $\{a_n\}$ Քլաշկեի հաջորդականությունը բավարարի հետևյալ պայմանին

$$\sum h(1 - |a_n|) < \infty,$$

որտեղ h ֆունկցիան բավարարում է որոշ պայմանների: Ապա յուրաքանչյուր $\gamma \geq 1$ համար ղոյություն ունի մի E_γ բազմություն, որի $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\gamma} H(k^{-\gamma})}$ անուցիկ

ունակությունը զերո է, այնպես որ այդ $\{a_n\}$ հաջորդականության համար կազմած Քլաշկեի արտադրյալը ունի T_γ -սահման $C-E_\gamma$ բազմության յուրաքանչյուր կետում: Ստացված են նաև այլ ընդլայնված արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1950.
- ² А. Лойатер и Г. Пурания, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., 239 (1957). ³ Г. Карго, Canadian Journal of mathematics, vol. XIV, № 2, (1962), 334—348. ⁴ Н. Барн, Тригонометрические ряды. М., 1961. ⁵ В. С. Захарян, Изв. АН СССР, серия матем., 27, 4 (1963). ⁶ Г. Карго, Duke mat. journal, vol. 30, № 1, (1963), 143—149. ⁷ Г. Шаниро и А. Шилдс, Math. Zellsphr. 80, 217—229 (1962).