ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVIII 1964 4

МАТЕМАТИКА

В. А. Явряи

О функции спектрального сдвига для операторов Штурма—Лиувилля

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 7/I 1964)

Пусть H_1 и H_2—самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, $R_\lambda(H_k)$—резольвента оператора H_k $(k=1, 2)$, $\rho(H_k)$—множество регулярных точек H_k. Через S_1 обозначаем банахово пространство ядерных операторов, $|A|_1$—норма оператора A в S_1. Обобщая результаты из [1,2], М. Г. Крейн [3] установил, что если для некоторого $\lambda_0 \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)$

$$R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) \in S_1, \tag{1}$$

то существует с точностью до постоянного слагаемого единственная вещественная функция $\xi(t)$, $(-\infty < t < \infty)$, такая, что

$$Sp\,[R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)] = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t)\,dt}{(t-\lambda)^2} \quad (\lambda \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)). \tag{2}$$

Следуя [3], функцию $\xi(t)$ назовем *функцией спектрального сдвига.*

В пространстве $L_2(0, \infty)$ рассмотрим операторы H_1 и H_2, задающиеся равенствами:

$$H_1 y = -y'', \quad y(0)=0, \quad 0 \leqslant r < \infty,$$

$$H_2 y = -y'' + q(r)\,y, \quad y(0)=0, \quad 0 \leqslant r < \infty.$$

Здесь $q(r)$—вещественная функция, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_0^1 r\,|q(r)|\,dr + \int\limits_1^\infty |q(r)|\,dr < \infty. \tag{3}$$

Пусть $\psi(r, k)$—решение следующей задачи:

$$-\psi'' + q\psi - \lambda\psi = 0, \quad \lambda = k^2$$

$$\psi(0, k) = 0, \quad \psi'(0, k) = 1.$$

При предположении (3) имеется асимптотика:

$$\psi(r, k) \sim -\frac{M(k)}{2ik} e^{-ikr}, \quad r \to \infty, \quad \operatorname{Jm} k > 0,$$

$$\psi(r, k) \sim A(k) \sin(kr - \delta(k)), \quad r \to \infty, \quad \operatorname{Jm} k = 0,$$

где

$$M(k) = 1 + \int_0^\infty e^{ikr} q(r) \psi(r, k)\, dr, \quad \operatorname{Jm} k \geqslant 0,$$

$$A(k) = |M(k)|, \quad \delta(k) = \arg M(k), \quad \operatorname{Jm} k = 0. \tag{4}$$

Через V обозначим оператор умножения на $q(r)$: $Vy = q(r)y(r)$. В работе [4] В. С. Буслаев и Л. Д. Фаддеев доказали, что если

$$\int_0^\infty r\,|q(r)|\,dr < \infty,$$

то справедливо равенство:

$$Sp\,\{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2).$$

Там же указано, что $M(\sqrt{\lambda}) = det\,(I + VR_\lambda)$. Однако можно заметить, что условие $\int_0^\infty r\,|q(r)|\,dr < \infty$ не обеспечивает существования определителя, т. е. нельзя утверждать, что $VR_\lambda \in S_1$. Более того, может случиться, что $D(V) \cap D(H_1) = 0$ (см. [5]).

Теорема. *Если $q(r)$ удовлетворяет условию* (3), *то*

$$M(\sqrt{\lambda}) = \det(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}}), \quad \arg \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство.

Заметим, что $R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}} \in S_1$, причем

$$|R_{-a}^{\frac{1}{2}} V R_{-a}^{\frac{1}{2}}|_1 \leqslant \int_0^\infty |q(r)|\, \frac{e^{-2\sqrt{a}r} - 1}{-2\sqrt{a}}\, dr, \quad a > 0. \tag{6}$$

Здесь, как и в дальнейшем, $R_\lambda = R_\lambda(H_1)$.

Доказательство этого факта мы опускаем, так как подобный результат имеется в [5].

Легко видеть далее, что

$$R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) = R_\lambda^{\frac{1}{2}} T_\lambda R_\lambda^{\frac{1}{2}},$$

где

$$T_\lambda = -\left(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}} \in S_1.$$

Отсюда следует, что $R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1) \in S_1$.

Нетрудно проверить, что ядра резольвент $R_\lambda(H_1)$ и $R_\lambda(H_2)$ соответственно имеют вид:

$$R_\lambda^{(1)}(r, s)=\begin{cases}\dfrac{\sin kr}{k}\,e^{iks}, & r\leqslant s\\[2mm] \dfrac{\sin ks}{k}\,e^{ikr}, & r\geqslant s\end{cases},$$

$$R_\lambda^{(2)}(r, s)=\begin{cases}\psi(r, k)\,\dfrac{f(s, k)}{f(0, k)}, & r\leqslant s\\[2mm] \psi(s, k)\,\dfrac{f(r, k)}{f(0, k)}, & r\geqslant s,\end{cases}$$

где

$$-f''+qf-k^2f=0, \quad f(r, k)\in L_2(0, \infty). \quad \mathrm{Jm}\,k>0.$$

Дополнительно к (3) предположим теперь, что $q(r)=0$ при $r>r_0$. Тогда ясно, что

$$f(r, k)=e^{ikr}, \quad r>r_0$$

$$\psi(r, k)=\frac{A(k)}{k}\sin(kr-\delta(k)), \quad r>r_0. \tag{7}$$

Так как

$$R_\lambda(H_2)-R_\lambda(H_1)\in S_1,$$

то

$$Sp\,[R_\lambda(H_2)-R_\lambda(H_1)]=\int_0^\infty(R_\lambda^{(2)}(s, s)-R_\lambda^{(1)}(s, s))\,ds=$$

$$=\int_0^\infty\left(\psi(s, k)\,\frac{f(s, k)}{f(0, k)}-\frac{\sin ks}{k}\,e^{iks}\right)ds=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_0^r\left(\psi(s, k)\,\frac{f(s, k)}{f(0, k)}-\frac{\sin ks}{k}\,e^{iks}\right)ds.$$

Легко видеть, что

$$f\psi=\frac{1}{2k}(f\dot{\psi}'-f'\dot{\psi})',$$

где символы $\cdot$ и $'$ означают производные соответственно по k и s.

Это равенство заимствовано из доказательства В. С. Буслаева и Л. Д. Фаддеева, с которым автор имел возможность ознакомиться.

Из равенства (7) получаем, что

$$\dot{f}(r, k)=ire^{ikr}, \qquad \dot{f}'(r, k)=(i-kr)\,e^{ikr} \quad r>r_0$$

$$\psi(r, k)=-\frac{M(k)}{2ik}\,e^{-ikr}(1+O(e^{ikr})), \quad r\to\infty$$

$$\psi'(r, k) = \frac{M(k)}{2} e^{-ikr} (1 + O(e^{ikr})), \quad r \to \infty.$$

Следовательно,

$$\int_0^r \psi(s, k) f(s, k)\, ds = \frac{M(k)}{2k} ir + \frac{M(k)}{4k^2} - \frac{f(0, k)}{2k} + o(1).$$

Как известно, $f(0, k) = M(k)$. Таким образом, получаем, что

$$Sp\{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = -\frac{1}{2k} \frac{\dot{f}(0, k)}{f(0, k)} =$$

$$= -\frac{1}{2k} \frac{d}{dk} \ln M(k) = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda}).$$

С другой стороны, из теоремы 2 работы ([6]) следует, что

$$Sp\{R_\lambda(H_2) - R_\lambda(H_1)\} = -\frac{d}{d\lambda} \ln \det (I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}}).$$

Ясно, что $\ln M(\sqrt{iy}) \to 0$, если $y \to \infty$. Теорема 1 из ([6]) показывает, что также $\ln \det (I + R_{iy}^{\frac{1}{2}} V R_{iy}^{\frac{1}{2}}) \to 0$, если $y \to \infty$. Таким образом, теорема 1 для финитных $q(r)$ доказана. Пусть $q(r)$—любая функция, удовлетворяющая условию (3). Возьмем

$$q_n(r) = \begin{cases} q(r), & r \leqslant n \\ 0 & r > n \end{cases}, \qquad V_n y = q_n(r)\, y(r).$$

Тогда из уже доказанного следует, что

$$M_n(\sqrt{\lambda}) = \det (I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V_n R_\lambda^{\frac{1}{2}}). \tag{8}$$

Из (6) вытекает, что

$$|R_{-a}^{\frac{1}{2}} (V - V_n) R_{-a}^{\frac{1}{2}}|_1 \leqslant \int_n^\infty |q(r)| \frac{1 - e^{-2\sqrt{a}r}}{2\sqrt{a}}\, dr, \quad a > 0.$$

Отсюда, а также из (4) получаются равенства:

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\sqrt{\lambda}) = M(\sqrt{\lambda}), \qquad \lim_{n\to\infty} |R_{-a}^{\frac{1}{2}} (V - V_n) R_{-a}^{\frac{1}{2}}|_1 = 0.$$

Переходя к пределу в (8), получаем (5).

Теорема 1 доказана.

Обозначим через λ_l $(l = 1, 2 \cdots)$ точки отрицательного спектра H_2 (они все—собственные значения, сгущающиеся к 0).

Полученная теорема вместе с упомянутой в начале теоремой М. Г. Крейна дает следующий результат:

Т е о р е м а 2. *При условии* (3)

$$\xi(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\,\delta(\sqrt{\lambda}), & \lambda>0.\\[2mm] -\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\sum_{l}\delta(t-\lambda_l)\,dt, & \lambda<0.\end{cases}$$

Эта теорема при условии $\int\limits_0^{\infty} r\,|q(r)|\,dr<\infty$ доказана в (4).

Автор выражает искреннюю благодарность чл.-корр. АН УССР М. Г. Крейну за интерес к этой работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՅԱՎՐՅԱՆ

Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի սպեկտրալ շեղման ֆունկցիայի մասին

$L_2(0\ \infty)$ տարածության մեջ դիտարկվում է H_1 և H_2 օպերատորները, որոնք տրվում են հետևյալ հավասարություններով.

$$H_1 y=-y'',\quad y(0)=0;\quad 0\leqslant r<\infty$$

$$H_2 y=-y''+q(r)\,y,\quad y(0)=0;\quad 0\leqslant r<\infty$$

Այստեղ $q(r)$-ը իրական ֆունկցիա է, որը բավարարում է (3) պայմանին:
Դիցուք $\psi(r,k)$ հետևյալ խնդրի լուծումն է

$$-\psi''+q\psi-\lambda\psi=0\quad \lambda=k^2$$

$$\psi(0,k)=1\quad \psi'(0,k)=1$$

(3) պայմանի դեպքում գոյություն ունի հետևյալ ասիմպտոտիկան

$$\psi(r,k)\sim-\frac{M(k)}{2ik}\,e^{ikr},\quad r\to\infty\quad \mathrm{Jm}\,k>0$$

$$\psi(r,k)\sim A(k)\sin(kr-\delta(k)\quad r\to\infty\quad \mathrm{Jm}\,k=0$$

որտեղ՝

$$M(k)=1+\int\limits_0^{\infty}e^{ikr}q(r)\,\psi(rk)\,dr\qquad \mathrm{Jm}\,k\geqslant 0$$

$$A(k)=|M(k)|\qquad \delta(k)=\arg M(k)\qquad \mathrm{Jm}\,k=0$$

(4) աշխատանքում Վ. Ս. Բուսլաևը և Լ. Դ. Ֆադեևը ապացուցել են, որ եթե

$$\int\limits_0^{\infty}r\,q(r)\,|\,dr<\infty,$$

ապա՝

$$S_p\{R_\lambda(H_2)-R_\lambda(H_1)\}=-\frac{d}{d\lambda}\ln M(\sqrt{\lambda})\quad \lambda\in\rho(H_1)\cap\rho(H_2)$$

Այնտեղ նշված է, որ

$$M(\sqrt{\lambda}) = \det(I + ER_\lambda):$$

Բայց կարելի է նկատել, որ $\int\limits_0^\infty r\,|q(r)|\,dr < \infty$ պայմանը չի բավարարում դետերմինանտի գոյությանը։

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը. Եթե $q(r)$ բավարարում է (3) պայմանին, ապա

$$M(\sqrt{\lambda}) = \det\left(I + R_\lambda^{\frac{1}{2}} V R_\lambda^{\frac{1}{2}}\right), \quad \arg\lambda \neq 0.$$

Այս արդյունքը Մ. Գ. Կրեյնի սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիայի մասին թեորեմի հետ տալիս է հետևյալ պնդումը

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\,\delta(\sqrt{\lambda}) & \lambda > 0 \\ -\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \sum_l \delta(t - \lambda_l)\,dt & \lambda < 0, \end{cases}$$

որտեղ՝ λ_l H_2 օպերատորի բացասական սպեկտրի կետերն են։

Այդ թեորեմը $\int\limits_0^\infty r\,|q(r)|\,dr < \infty$ պայմանի դեպքում ապացուցված է (4)-ում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн*, Матем. сборник, 33 (75), 3, (1953). [2] *И. М. Лифшиц*, УМН. 7, № 1 (1952). [3] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 144, № 2 (1962). [4] *В. С. Буслаев* и *Л. Д. Фаддеев*, ДАН СССР, т. 132, № 1 (1960). [5] *С. Т. Курода*, Journal of the Math. Society of Japan, vol. 12, № 3, July, 1960. [6] *В. А. Явряп*, ДАН АрмССР, т. XXXVIII, № 1 (1964).