ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVIII 1964 3

МАТЕМАТИКА

Ф. Г. Арутюнян

О единственности рядов по системе Хаара

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 16/XII 1963)

В 1914 году Хааром ([1]) была сформулирована следующая

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *по системе Хаара для всех* $x \in [0,1]$ *сходится к нулю, то все коэффициенты* a_n $(n=1, 2,\cdots)$ *равны нулю.*

Однако приведенное Хааром доказательство этой теоремы ошибочно, и его метод не может привести к цели. В этом доказательстве не принимается во внимание поведение ряда в двоично рациональных точках, что и в некоторых его рассуждениях приводит к неправильному выводу. В дальнейшем мы увидим, что основная трудность доказательства теоремы 1 связана именно с поведением ряда в двоично рациональных точках.

В настоящей работе, применяя метод, отличный от метода Хаара, доказывается более общая теорема, из которой, в частности, следует также теорема 1. А именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x) \tag{1}$$

обладает следующими свойствами

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x) = 0$ *почти для всех* $x \in [0,1]$.

2) *Последовательность* $a_n\chi_n(x)$ $(n=1, 2,\cdots)$ *ограничена в каждой точке отрезка* $[0,1]$, *то есть для любого* $x \in [0,1]$ *существует число* $M(x) > 0$ *такое, что* $|a_n\chi_n(x)| < M(x)$ $(n=1, 2,\cdots)$.

3) *Ряд* (1) *сходится к конечной сумме всюду, кроме, быть может, счетного множества точек* $\{x_k\}$ *из* $[0,1]$. *Тогда все коэффициенты* a_n $(n=1, 2,\cdots)$ *ряда* (1) *равны нулю.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, напомним определение системы Хаара.

Система Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\cdots,\ \chi_n^{(1)}(x),\cdots\chi_n^{(2^n)}(x),\cdots \tag{2}$$

определяется следующим образом (см. [1], стр. 625)

$$
\begin{aligned}
\chi_0^{(0)}(x) &= 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
\chi_0^{(1)}(x) &= 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\
&= -1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\
&= 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Для определения функций $\chi_n^{(k)}(x)$ $(n = 1, 2,\cdots;\ k = 1, 2,\cdots, 2^n)$ разделим отрезок $[0,1]$ на 2^{n+1} равных частей. Пусть $\Delta_n^{(i)}$ $(n = 1, 2,\cdots$ $k = 1, 2,\cdots, 2^{n+1})$ интервалы, полученные разбиением отрезка $[0,1]$ вышеуказанным способом. Определим $\chi_n^{(k)}$ следующим образом

$$
\begin{aligned}
\chi_n^{(k)}(x) &= \sqrt{2^n} \quad \text{при} \quad x \in \Delta_n^{(2k-1)}, \\
&= -\sqrt{2^n} \quad \text{при} \quad x \in \Delta_n^{(2k)}, \\
&= 0 \quad \text{при} \quad x \in \bigcup_i \Delta_n^{(i)},\ \text{где}\ i \neq 2k-1\ \text{и}\ 2k.
\end{aligned} \tag{4}
$$

В точках $x = 0$ и $x = 1$ полагаем значения функции $\chi_n^{(k)}(x)$ равными ее значениям, соответственно, на интервалах $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta^{(2^{n+1})}$. В тех точках, где $\chi_n^{(k)}(x)$ еще не определена (очевидно, они образуют конечное множество), значения функции принимаются равными среднему арифметическому левого и правого пределов в соответствующей точке.

Пусть

$$\chi_1(x),\ \chi_2(x),\cdots \chi_n(x),\cdots \tag{5}$$

все функции системы Хаара, расположенные в порядке (2).

Доказательство теоремы 2. Предположим, что утверждение теоремы 2 не верно, то есть ряд (1) имеет отличные от нуля коэффициенты. Обозначим через $\{n_k\}$ последовательность тех номеров n, для которых $a_n \neq 0$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x), \tag{6}$$

очевидно, удовлетворяет условиям 1), 2) и 3) теоремы 2 и, кроме того, $a_{n_k} \neq 0$ $(k = 1, 2,\cdots)$.

Через $\delta_{n_k,1}$ и $\delta_{n_k,2}$ обозначим те интервалы, где функция $a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$ принимает, соответственно, отрицательное и положительное значения.

Обозначим через $\delta_{n_k,i}(\chi)$ $(k=1, 2, \cdots; i=1, 2)$ все те функции из системы $\{\chi_{n_k}(x)\}$, которые равны нулю вне $\bar{\delta}_{n_k,i}$*.

Отметим некоторые свойства ряда (6) и системы Хаара.

a) Система $\delta_{n_k,i}(\chi)$ при $k>1$ является ортогональной системой, построенной на отрезке $\delta_{n_k,i}$, функции которой ортогональны к постоянной, то есть интегралы этих функций на интервале $\delta_{n_k,i}$ при $k>1$ равны нулю.

b) Для любой точки $x_0\in[0,1]$ и для любой последовательности интервалов

$$\delta_{n_{k_1},i_1}\supset\delta_{n_{k_2},i_2}\supset\cdots\supset\delta_{n_{k_j},i_j}\supset\cdots,\tag{7}$$

где $k_1<k_2<\cdots<k_j<\cdots$ и $i_j=1$ или 2, существует число p такое, что

$$x_0\in\bar{\delta}_{n_{k_p},1}\quad\text{или}\quad x_0\in\bar{\delta}_{n_{k_p},2}.\tag{8}$$

c) Если ряд по функциям $\delta_{n_k,i}(\chi)$ $(k>1, i=1, 2)$ почти везде на интервале $\delta_{n_k,i}$ сходится к постоянному числу, отличному от нуля, то для любого числа $M>0$ существует некоторая частная сумма этого ряда, которая на некотором интервале $\delta_{n_{k'},i'}\subset\delta_{n_k,i}$ постоянна и по абсолютной величине больше M.

d) Если для некоторого $k_0>1$ сумма

$$\sum_{j=1}^{k_0}a_{n_j}\chi_{n_j}(x)\tag{9}$$

тождественно не равняется нулю на интервале $\delta_{n_{k_0},i}$, $i=1$ или 2, то для любой точки $x_0\in[0,1]$ и числа M существуют числа $k'>k_0$ и i', $i'=1$ или 2 такие, что

$$\delta_{n_{k'},i'}\subset\delta_{n_{k_0},i};\qquad x_0\in\bar{\delta}_{n_{k'},i'},\tag{10}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k'}a_{n_j}\chi_{n_j}(x)=\text{const}\right|>M\ \text{для всех}\ x\in\delta_{n_{k'},i'}.$$

Свойства a) и b) очевидны. Свойство c) непосредственно следует из свойства a). В самом деле, в силу условия a), если ряд по функциям системы $\delta_{n_k,i}(\chi)$ почти всюду на интервале $\delta_{n_k,i}$ сходится к отличному от нуля постоянному числу, то частные суммы этого ряда

* $\bar{\delta}_{n_k,i}$ есть замыкание интервала $\delta_{n_k,i}$.

не могут быть ограниченными на множестве полной меры, лежащем в интервале $\delta_{n_{k_0}, i}$. Следовательно, некоторые частные суммы этого ряда по абсолютному значению будут больше, чем заданное число $M > 0$ на некоторых множествах положительной меры. Среди этих частных сумм возьмем первую. Очевидно, эта частная сумма по абсолютному значению будет больше, чем M, всюду на некотором интервале вида $\delta_{n_{k_0}, i'}$; $i' = 1$ или 2. Докажем утверждение d).

Пусть сумма (9), как это предполагалось в условии d), отлична от нуля хотя бы в одной точке интервала $\delta_{n_{k_0}, i}$. Тогда, очевидно, эта сумма на интервале $\delta_{n_{k_0}, i}$ равняется отличному от нуля постоянному числу. Так как из всех функций $\chi_{n_k}(x)$ при $k > k_0$ на интервале $\delta_{n_{k_0}, i}$ отличны от нуля только функции системы $\delta_{n_{k_0}, i}(\chi)$, то, учитывая условие 1) теоремы 2 и условие c), найдем $k_1 > k_0$ и i_1, $i_1 = 1$ или 2 такие, что

$$\left|\sum_{j=1}^{k_1} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) - \text{const}\right| > M \text{ для всех } x \in \delta_{n_{k_1}, i_1}. \tag{11}$$

Предположим теперь, что определены числа $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$; $i_1, i_2, \cdots, i_p$, где $k_1 > k_0$, $i_j = 1$ или 2, $1 \leq j \leq p$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\delta_{n_{k_0}, i} \supset \delta_{n_{k_1}, i_1} \supset \delta_{n_{k_2}, i_2} \supset \cdots \supset \delta_{n_{k_p}, i_p} \tag{12}$$

и

$$\left|\sum_{j=1}^{k_q} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > qM \text{ при } x \in \delta_{n_{k_q}, i_q}; \quad 1 \leq q \leq p.$$

Определим k_{p+1} и i_{p+1}. В силу c) и (12) существуют числа k_{p+1} и $i_{p+1} = 1$ или 2 такие, что

$$\delta_{n_{k_{p+1}}, i_{p+1}} \subset \delta_{n_{k_p}, i_p} \tag{13}$$

и

$$\left|\sum_{j=1}^{k_{p+1}} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > (p+1) M \text{ для всех } x \in \delta_{n_{k_{p+1}}, i_{p+1}}.$$

Таким образом, можно определить последовательность числа

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_p < \cdots; \ i_1, i_2, \cdots, i_p, \cdots; \ k_1 > k_0; \ i_p = 1 \text{ или } 2,$$

для которых

$$\delta_{n_{k_0}, i} \supset \delta_{n_{k_1}, i_1} \supset \delta_{n_{k_2}, i_2} \supset \cdots \supset \delta_{n_{k_p}, i_p} \supset \cdots \tag{14}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k_p} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > pM \text{ для всех } x \in \delta_{n_{k_p}, i_p}.$$

существует точка ξ, принадлежащая всем $\delta_{n_{k_p}, i_p}$. Следовательно, по условию 2) теоремы 2 существует $M_1 > 0$ такое, что

$$|a_{n_{k_p}} \chi_{n_{k_p}}(\xi)| < M_1 \quad (p = 1, 2, \cdots). \tag{15}$$

Из (15), в силу определения системы Хаара, имеем

$$a_{n_{k_p}} \chi_{n_{k_p}}(x) < 2M_1 \text{ для всех } x \in [0, 1] \text{ и } (p = 1, 2, \cdots). \tag{16}$$

Пусть число Q удовлетворяет условию

$$Q > M + 2M_1. \tag{17}$$

Тогда из b), (14), (16) и (17) получим, что для некоторой пары чисел (p', i') $p'M > Q$; $i' = 1$ или 2 имеет место

$$\delta_{n_{k_{p'}}, i'} \subset \delta_{n_{k_0}, i}; \quad x_0 \in \delta_{n_{k_{p'}}, i'}$$

и (18)

$$\left|\sum_{j=1}^{k_{p'}} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > M \text{ для всех } x \in \delta_{n_{k_{p'}}, i'}.$$

Если обозначим $k_{p'}$ через k', то получим (10). Утверждение d) доказано.

Теперь завершим доказательство теоремы 2.

Пусть $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$—совокупность всех точек последовательности $\{x_k\}$ (см. формулировку теоремы 2) и всех двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$. Существуют числа n_{k_0} и i_0 ($k_0 > 1$; $i_0 = 1$ или 2), для которых

$$\left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > 0 \quad \text{при} \quad x \in \delta_{n_{k_0}, i_0}. \tag{19}$$

В силу (19) и d) существуют числа n_{k_1} и i_1, $i_1 = 1$ или 2 такие, что

$$\delta_{n_{k_1}, i_1} \subset \delta_{n_{k_0}, i_0}; \quad r_1 \in \overline{\delta}_{n_{k_1}, i_1}$$

и (20)

$$\left|\sum_{j=1}^{k_1} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > 1 \text{ для всех } x \in \delta_{n_{k_1}, i_1}.$$

Предположим, что определены числа $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$ и $i_1, i_2, \cdots, i_p$ так, что

$$r_1, r_2, \cdots, r_q \in \overline{\delta}_{n_{k_q}, i_q}; \quad (q = 1, 2, \cdots, p); \ i_q = 1 \text{ или } 2)$$

$$\delta_{n_{k_1}, i_1} \supset \delta_{n_{k_2}, i_2} \supset \cdots \supset \delta_{n_{k_p}, i_p}, \tag{21}$$

$$\left|\sum_{1=j}^{k_q} a_{n_j} \chi_{n_j}(x) = \text{const}\right| > q \text{ для всех } x \in \delta_{n_{k_q}, i_q}.$$

В силу d) находим числа $k_{p+1} > k_p$ и i_{p+1} ($i_{p+1} = 1$ или 2) такие, что $r_1, r_2, \cdots, r_{p+1} \in \overline{\delta}_{n_{k_{p+1}}, i_{p+1}}$, $\delta_{n_{k_{p+1}}, i_{p+1}} \subset \delta_{n_{k_p}, i_p}$, и на интервале

$\delta_{n_{k_{p+1}}, i_{p+1}}$ выполняется (21) для $q = p + 1$. Таким образом, мы находим последовательность $k_1 < k_2 < \cdots < k_q < \cdots$; $i_1, i_2, \cdots, i_q, \cdots$, для которых будет иметь место (21) для всех $q = 1, 2, \cdots$.

Пусть $\bar{x}$ точка, принадлежащая всем $\bar{\delta}_{n_{k_q}, i_q}$. По конструкции $\bar{x}$ не есть двоично рациональная точка, и поэтому $\bar{x} \in \delta_{n_{k_q}, i_q}$ $(q = 1, 2, \ldots)$. Отсюда в силу (21)

$$\left| \sum_{j=1}^{k_q} a_{n_j} \chi_{n_j}(\bar{x}) \right| > q \text{ для всех } q = 1, 2, \cdots \tag{22}$$

То есть в точке $\bar{x}$ ряд (6) расходится. С другой стороны, в силу 2) теоремы 2, ряд (6) в точке $\bar{x}$ должен сходиться. Полученное противоречие показывает, что теорема 2 верна.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Հաարի սիստեմով շարքերի միակության մասին

1914 թվականին Հաարը ձևակերպել է այսպիսի

Թեորեմ 1. Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ շարքը ըստ Հաարի սիստեմի ամենուրեք զուգամիտում է զերոյի, ապա բոլոր a_n $(n = 1, 2, \cdots)$ գործակիցները հավասար են զերոյի:

Հաարի կողմից տրված ապացույցը սխալ է: Ներկա հոդվածում ապացուցված է ավելի ընդհանուր թեորեմ, որից մասնավորապես հետևում է Հաարի թեորեմը:

Թեորեմ 2. Թող ըստ Հաարի սիստեմի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ շարքը բավարարի հետևյալ պայմաններին՝

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) = 0$ համարյա բոլոր x-երի համար $[0,1]$-ից:

2) $a_n \chi_n(x)$-ֆունկցիաները սահմանափակ են $[0,1]$—հատվածի բոլոր կետերում

3) Շարքը զուգամիտում է վերջավոր գումարի ամենուրեք, բացի գուցե $[0,1]$ հատվածի $\{x_k\}$ հաշվելի թվով կետերում:

Այդ դեպքում բոլոր a_n $(n = 1, 2, \cdots)$ գործակիցները հավասար են զերոյի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] А Хаар, Gesammelte Arbeiten, Budapest, p. 625, 1959.