

МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и С. М. Дургарьян

О колебаниях ортотропной пологой оболочки,
 находящейся в переменном температурном поле

(Представлено 31/X 1963)

1. Рассматривается задача так называемых свободных колебаний весьма пологой ортотропной оболочки положительной гауссовой кривизны и постоянной толщины h , находящейся в поле действия высоких температур. Аналогичная задача для ортотропной пластинки в одном частном случае рассмотрена в работе ⁽¹⁾.

Предполагается, что оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат α, β, γ , материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, параллельные координатным поверхностям ⁽²⁾.

Считается, что температура оболочки $T = T(\gamma, t)$ удовлетворяет начальному ($t = t_0$) и поверхностным условиям, а также уравнению теплопроводности. В первом приближении считаем, что от температуры нагрева зависят только модули упругости $E_\alpha = E_1(T)$, $E_\beta = E_2(T)$, модуль сдвига $G_{\alpha\beta} = G_{12}(T)$ и коэффициенты линейного расширения $a_\alpha = a_1(T)$, $a_\beta = a_2(T)$ ⁽³⁻⁵⁾.

При выводе основных уравнений принимаются гипотезы Кирхгоффа—Лява ⁽⁶⁾ и Ф. Неймана ⁽⁷⁾, а также следующие дополнительные предположения ^(2, 6):

а) в первых двух уравнениях равновесия (движения) можно пренебречь членами N_α/R_α и N_β/R_β ($1/R_\alpha = 1/R_1$, $1/R_\beta = 1/R_2$ — главные кривизны срединной поверхности; N_α, N_β — поперечные силы), а также инерционными силами, обусловленными тангенциальными перемещениями;

б) в выражениях, связывающих компоненты изгибной деформации (κ_1, κ_2, τ) с перемещениями, можно сохранить лишь члены, содержащие нормальное перемещение w ;

в) первые два уравнения неразрывности и шестое уравнение равновесия удовлетворены тождественно;

г) коэффициенты первой квадратичной формы A и B при дифференцировании ведут себя как постоянные;

д) система координат выбрана так, что выполняется сильное неравенство $AB/R_1R_2 \ll 1$.

2. Из обобщенного закона Гука, используя гипотезы Кирхгофа — Лява и Ф. Неймана, для расчетных напряжений имеем (2, 3, 7, 8)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + \gamma (B_{11}x_1 + B_{12}x_2) - \beta_1 T, \\ \sigma_2 &= B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + \gamma (B_{12}x_1 + B_{22}x_2) - \beta_2 T, \\ \tau_{\alpha\beta} &= B_{66}\omega + 2\gamma B_{66}\tau, \end{aligned} \right\}$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2},$$

$$B_{66} = G_{12}, \quad \beta_i = B_{1i}a_1 + B_{2i}a_2 \quad (i = 1, 2),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_2}, \quad \omega = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$x_1 = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_2 = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta},$$

$u = u(x, \beta, t)$, $v = v(x, \beta, t)$, $w = w(x, \beta, t)$ — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки; $\nu_1 = \nu_{12}$, $\nu_2 = \nu_{21}$ — коэффициенты Пуассона.

Выпишем уравнения движения и неразрывности деформаций для рассматриваемого случая при отсутствии внешних сил

$$B \frac{\partial T_1}{\partial x} + A \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad B \frac{\partial S}{\partial x} + A \frac{\partial T_2}{\partial \beta} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} - m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

(m^* — масса оболочки, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности)

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} + \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_2}{R_1} = 0. \quad (2.2)$$

Для тангенциальных сил ($T_\alpha = T_1$, $T_\beta = T_2$, $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha} = S$) и для моментов ($M_\alpha = M_1$, $M_\beta = M_2$, $H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha} = H$) имеем (2, 3, 8)

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}x_1 + K_{12}x_2 - C_{1T}, \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + K_{12}x_1 + K_{22}x_2 - C_{2T}, \\ S &= C_{66}\omega + 2K_{66}\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + D_{11}x_1 + D_{12}x_2 - K_{1T}, \\ M_2 &= K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + D_{12}x_1 + D_{22}x_2 - K_{2T}, \\ H &= K_{66}\omega + 2D_{66}\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где жесткости $C_{ij} = C_{ij}(T)$, $K_{ij} = K_{ij}(T)$, $D_{ij} = D_{ij}(T)$, температурные усилия и моменты $C_{iT} = C_{iT}(T)$, $K_{iT} = K_{iT}(T)$ выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} C_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} d\gamma, & K_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} \gamma d\gamma, & D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} \gamma^2 d\gamma, \\ C_{1T} &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_1 T d\gamma, & K_{1T} &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_1 T \gamma d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

3. Введем, как обычно, функцию напряжений φ по формулам

$$T_1 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad S = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

По формулам (2.3) можно выразить компоненты тангенциальной деформации ε_1 , ε_2 , ω через функцию напряжений φ , а затем по (2.4) через ту же функцию напряжений можно выразить моменты M_1 , M_2 , H .

Внеся значения ε_1 , ε_2 , T_1 , T_2 , M_1 , M_2 , H , выраженные через функцию напряжений, в третье уравнение движения (2.1) и в уравнение неразрывности деформаций (2.2), для определения искомых функций w и φ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{11}^0 - D_{11}}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{D_{12}^0 - D_{12} + 2(D_{66}^0 - D_{66})}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ & + \frac{D_{22}^0 - D_{22}}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{d_{21}}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \frac{d_{11} + d_{22} - 2d_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ & + \frac{d_{12}}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} - \frac{1}{B^4} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ & \frac{A_{22}}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \frac{2A_{12} + A_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{A_{11}}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} + \frac{d_{21}}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \\ & + \frac{d_{11} + d_{22} - 2d_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{d_{12}}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - \\ & - \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{B^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{C_{22}}{\Omega}, & A_{22} &= \frac{C_{11}}{\Omega}, & A_{66} &= \frac{1}{C_{66}}, & A_{12} &= -\frac{C_{12}}{\Omega}, \\ \Omega &= C_{11}C_{22} - C_{12}^2, & d_{11} &= \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega}, & d_{22} &= \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega}, \\ d_{12} &= \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega}, & d_{21} &= \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega}, & d_{66} &= \frac{K_{66}}{C_{66}}, \\ D_{11}^0 &= \frac{K_{11}^2 C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{11}}{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{22}^0 &= \frac{K_{12}^2 C_{11} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{22}}{\Omega}, & D_{66}^0 &= \frac{K_{66}^2}{C_{66}}, \\ D_{12}^0 &= \frac{K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

В последующем будем рассматривать случай, когда температура не изменяется по толщине оболочки $T = T(t)$.

В этом случае, как это легко заметить из (2.5) и (3.2), имеем

$$K_{ij} = K_{17} = d_{ij} = D_{ij}^0 = 0.$$

Тогда из (3.1) получим следующие уравнения задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_{11}}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{A B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{D_{22}}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{1}{B^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \\ + \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{A_{22}}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{2A_{12} + A_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{A_{11}}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} - \\ - \frac{1}{B^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{A^2} \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

4. Рассмотрим поперечные колебания прямоугольной в плане, свободно опертой по всему контуру весьма пологой ортотропной оболочки.

Граничными и начальными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} w = T_1 = M_1 = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0 \text{ и } \beta = b, \\ w = T_2 = M_2 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \text{ и } \alpha = a, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$w = w_0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial t} = w_0' \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \alpha = a/2, \quad \beta = b/2. \quad (4.2)$$

Очевидно, граничным условиям (4.1) удовлетворим, полагая

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t) \sin(\pi n \alpha / a) \sin(\pi m \beta / b), \\ \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}(t) \sin(\pi n \alpha / a) \sin(\pi m \beta / b). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Подставив значения w и φ в исходные уравнения (3.3), для $F_{nm}(t)$ будем иметь

$$\begin{aligned} F_{nm}(t) = \\ = - \left(\frac{ABab}{\pi} \right)^2 \frac{A^2 a^2 m^2 / R_1 + B^2 b^2 n^2 / R_2}{B^4 b^4 n^4 A_{22} + A^2 B^2 a^2 b^2 n^2 m^2 (2A_{12} + A_{66}) + A^4 a^4 m^4 A_{11}} f_{nm}(t), \end{aligned}$$

а для определения функции $f_{nm}(t)$ получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\ddot{f}_{nm}(t) + \delta^2 \psi_{nm}(t) f_{nm}(t) = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\delta^2 = \frac{B_{11}(t_0) h}{12m^* g A a} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} \psi_{nm} = & \frac{B_{11}(t)}{B_{11}(t_0)} \cdot \frac{g}{Aa} \left\{ \left(\frac{\pi h}{Aa} \right)^2 \left[n^4 + 2 \left(\nu_2 + 2 \frac{B_{66}(t)}{B_{11}(t)} \right) \left(\frac{Aam}{Bb} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B_{22}(t)}{B_{11}(t)} \left(\frac{Aam}{Bb} \right)^4 \right] + \right. \\ & \left. + 12(1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{Aa}{\pi} \right)^2 \left(A^2 a^2 m^2 k_1 + B^2 b^2 n^2 k_2 \right)^2 \left[\frac{B_{11}(t)}{B_{22}(t)} \left(\frac{Bbn}{Aa} \right)^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{E_1(t)}{G_{12}(t)} - 2\nu_1 \right) (ABabnm)^2 + (Aam)^4 \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Для многих задач δ^2 является большим числом. В связи с этим решение уравнения (4.4) находим методом асимптотического интегрирования (2. 6).

Интегралы уравнения (4.4) будем искать в виде (в дальнейшем индексы n, m опускаем)

$$f = \Phi(t; \delta) e^{i\omega(t)}, \quad (4.5)$$

где $\Phi(t; \delta) = \Phi_0(t) + \delta^{-1} \Phi_1(t) + \delta^{-2} \Phi_2(t) + \dots$ — функция интенсивности, а $\omega(t)$ — функция изменчивости.

Внеся (4.5) в (4.4) и соответствующим образом сгруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^2 \Phi_0 (\dot{\psi} + \dot{\omega}^2) + \delta [2\dot{\Phi}_0 \dot{\omega} + \Phi_0 \ddot{\omega} + \Phi_1 (\dot{\psi} + \dot{\omega}^2)] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0} \delta^{-n} [\ddot{\Phi}_n + 2\dot{\Phi}_{n+1} \dot{\omega} + \Phi_{n+1} \ddot{\omega} + \Phi_{n+2} (\dot{\psi} + \dot{\omega}^2)] \right\} e^{i\omega} = 0, \end{aligned}$$

откуда при $\Phi_0 \neq 0$ будем иметь

$$\dot{\psi} + \dot{\omega}^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$2\dot{\Phi}_0 \dot{\omega} + \Phi_0 \ddot{\omega} = 0, \quad (4.7)$$

$$\ddot{\Phi}_n + 2\dot{\Phi}_{n+1} \dot{\omega} + \Phi_{n+1} \ddot{\omega} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (4.8)$$

Решив (4.6), для функции изменчивости будем иметь

$$\omega_1 = i \int \sqrt{\psi} dt + C_1, \quad \omega_2 = -i \int \sqrt{\psi} dt + C_2. \quad (4.9)$$

Внеся (4.9) в (4.7), найдем функцию интенсивности в нулевом приближении

$$\Phi_0 = C_1 \psi^{-1/4},$$

а каждое последующее приближение найдется из уравнения (4.8).

Таким образом, в нулевом приближении для f будем иметь

$$f = \psi^{-1/2} \left[C_1 \exp \left(i\delta \int V \bar{\psi} dt \right) + C_2 \exp \left(-i\delta \int V \bar{\psi} dt \right) \right], \quad (4.10)$$

где значения постоянных интегрирования с помощью (4.3) найдутся из условий (4.2).

5. Рассмотрим два частных случая, ограничившись в разложениях (4.3) первыми членами ($n = m = 1$).

а) Пусть $\psi_{nm}(t)$ в уравнении (4.4) постоянна и равна единице. Тогда из (4.10) для функции f в нулевом приближении найдем

$$f = C_1 \exp(i\delta t) + C_2 \exp(-i\delta t),$$

что совпадает с точным решением уравнения $\ddot{f} + \delta^2 f = 0$.

б) Пусть $\psi_{nm}(t) = 1 - \lambda t$. Тогда из (4.10) для функции f в нулевом приближении найдем

$$f = (1 - \lambda t)^{-1/2} \left\{ C_1 \cos \left[\frac{2\delta}{3\lambda} (1 - \lambda t)^{3/2} \right] + C_2 \sin \left[\frac{2\delta}{3\lambda} (1 - \lambda t)^{3/2} \right] \right\},$$

что совпадает с результатами, полученными в ⁽¹⁾ при асимптотическом представлении бесселевых функций, входящих в точное решение уравнения (4.4) при $\psi_{nm}(t) = 1 - \lambda t$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ ԵՎ Ս. Ս. ԴՈՒՐԳԱՐՅԱՆ

Փոփոխական ջերմային դաշտում գեոմոլ փոքր կորույթուն ունեցող
օրոշրոյ քաղանքների հաշվարկների մասին

Դիտարկվում է փոքր կորույթուն ունեցող օրոշրոյ թաղանթների տատանումների խնդիրը, երբ թաղանթը դտնվում է փոփոխական ջերմային դաշտում, և թաղանթի նյութի ֆիզիկա-մեխանիկական հատկությունները կախված են թաղանթի ջերմաստիճանից:

Յույց է տրված, որ նշված խնդիրը բերվում է (4.4) փոփոխական դործակից ունեցող դիֆերենցիալ հավասարմանը, որը մեծ թվով խնդիրների համար ինտեգրվում է անմիջապես եղանակով:

Դիտարկված են երկու մասնավոր օրինակներ, որոնք ցուցադրում են առաջարկված մեթոդը:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐՈՍԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1963.
- ² С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, ГИФМЛ, М., 1961.
- ³ С. М. Дургарьян, Инженерный журнал, 2, вып. 3, 1962.
- ⁴ Б. Е. Гейтвуд, Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам, ИИЛ, М., 1959.
- ⁵ И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах, Госатомиздат, 1962.
- ⁶ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, ГИИТЛ, М., 1953.
- ⁷ В. Новацкий, Вопросы термоупругости, Издательство АН СССР, М., 1962.
- ⁸ С. А. Амбарцумян, Известия АН АрмССР (физ.мат., естеств. и техн. науки), т. V, № 6 (1952).