ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVIII 1964 2

МАТЕМАТИКА

Р. В. Амбарцумян

Об обнаружении сигналов в потоке импульсов

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 6/I 1964)

§ 1. *Постановка задачи и некоторые предварительные замечания.* Пусть стационарный поток импульсов П является суммой (наложением) двух независимо протекающих составляющих потоков импульсов S и N.

$$\Pi = S + N.$$

Импульсы, принадлежащие потоку S, будем условно называть сигналами, а импульсы, принадлежащие потоку N, — шумами.

Часто встречается следующая ситуация: наблюдателю известны моменты $t_1, t_2, \cdots, t_n$ появления всех импульсов суммарного потока П за интервал наблюдения $(0, t)$, но ему неизвестно, какому именно из составляющих потоков — S или N — принадлежит каждый из этих импульсов.

Возникает задача принятия решения: используя знание статистических характеристик потоков S и N и результаты наблюдения $t_1, t_2, \cdots, t_n$, отнести каждый из наблюденных импульсов к сигналам или к шумам. Принятие конкретного решения очевидным образом эквивалентно выбору некоторого элемента $\bar\delta$ в пространстве Δ всех двоичных последовательностей $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) = \bar\delta$. Между тем, данное наблюдение $t_1, \cdots, t_n$ порождает некоторую вероятностную меру $P(\bar\delta)$ в пространстве Δ, которая отвечает различным возможностям действительного расположения сигналов и шумов при наблюдении.

Используя подход к данному вопросу в духе теории игр, будем предполагать заданными две цены a и b, выплачиваемые за ошибки двух родов, которые могут появиться после принятия решения.

Функция

$$\sum_{\bar\delta \in \Delta} \rho(\bar\delta', \bar\delta) P(\bar\delta), \qquad \bar\delta' \in \Delta, \tag{1.1}$$

где

$$\rho(\bar\delta, \bar\delta') = \sum_{i=1}^{n} \xi_i; \qquad \xi_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_i' = \delta_i \\ a, & \text{если } \delta_i' = 1,\ \delta_i = 0 \\ b, & \text{если } \delta_i' = 0,\ \delta_i = 1 \end{cases}$$

представляет собой средний суммарный убыток от принятия решения $\bar{\delta}'$.

Теорема 1. *Пусть*

$$p_i = \sum_{\delta_i = 1} P(\bar{\delta}).$$

Минимум функции (1.1) *достигается на векторе* $\bar{\delta}^* = (\delta_1^*, \cdots, \delta_n^*)$, *где*

$$\delta_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p_i > \dfrac{a}{a+b} \\ 0, & \text{если} \quad p_i < \dfrac{a}{a+b}. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользовавшись свойством математического ожидания M, получаем

$$\sum_{\bar{\delta} \in \Delta} \rho(\bar{\delta}', \bar{\delta}) P(\bar{\delta}) = M\rho(\bar{\delta}', \bar{\delta}) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i.$$

Так как p_i имеет смысл вероятности того, что $\xi_i = 1$, то выбор $\bar{\delta}^*$ способом, указанным в условии теоремы, минимизирует каждое из слагаемых $M\xi_i$. Это доказывает теорему.

Таким образом, для принятия оптимального решения оказывается существенным лишь знание вектора вероятностей $\bar{p} = (p_1, \cdots, p_n)$.

В последующих пунктах излагается метод его нахождения.

§ 2. *Одно характеристическое свойство вектора вероятностей* $\bar{p}$. Во избежание некоторых легко обходимых трудностей, значительно обременяющих, однако, изложение, будем предполагать далее, что $P(\bar{\delta})$ отличны от нуля для всех $\bar{\delta} \in \Delta$.

Пусть из множества натуральных чисел, меньших $n+1$, выбраны два непересекающихся подмножества

$$\begin{aligned} I &= \{i_1, \cdots, i_r\}, \quad 0 \leqslant r \leqslant n \\ J &= \{j_1, \cdots, j_s\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant n - r \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Пару $(I, J) = \varepsilon$ будем называть индексом ε.

Каждому индексу ε сопоставим подмножество Δ_ε элементов пространства Δ

$$\Delta_\varepsilon = \{\bar{\delta};\ \delta_m = 1, \text{ если } m \in I, \text{ и } \delta_m = 0, \text{ если } m \in J\},$$

Пусть

$$p_\varepsilon = \sum_{\bar{\delta} \in \Delta_\varepsilon} P(\bar{\delta}).$$

Далее, каждому индексу ε сопоставим n переменных $x_\varepsilon^1, \cdots, x_\varepsilon^n$.

Пусть $\qquad \bar{x}_\varepsilon = (x_\varepsilon^1, \cdots, x_\varepsilon^n)$.

Если задан индекс ε, определяемый множествами (2.1), для которых $r + s < n$, то с каждым $k \,\overline{\in}\, I \cup J$ и меньшим $n+1$ свяжем два других индекса

$$ {}^k\varepsilon = (\{i_1,\cdots, i_r, k\}, J), $$
$$ {}_k\varepsilon = (I, \{j_1,\cdots, j_s, k\}). $$

Через 0 обозначим индекс, для которого $r+s=0$.

Рассмотрим систему векторных уравнений

$$ \bar{x}_\varepsilon = \bar{x}_{{}^k\varepsilon}\, x^k_\varepsilon + \bar{x}_{{}_k\varepsilon}\,(1-x^k_\varepsilon), \tag{2.2} $$

где а) ε пробегает все индексы, для которых $r+s<n-1$;

б) при фиксированном ε k пробегает все натуральные значения, меньшие $n+1$ и не входящие $I\cup J$;

и начальное условие

$$ x^m_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } m\in I \\ 0, & \text{если } m\in J \quad (r+s=n-1), \\ P_{m_\varepsilon}/P_\varepsilon, & \text{если } m\notin I\cup J \end{cases} \tag{2.3} $$

которое задает вектора $\bar{x}_\varepsilon$ для всех тех индексов ε, для которых $r+s=n-1$.

Теорема 2. *Система* (2.2) *имеет, и притом единственное, решение, подчиненное начальному условию* (2.3). *Вектор вероятностей $\bar{p}$ совпадает с $\bar{x}_0$.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что вектора $\bar{x}_\varepsilon$ с компонентами

$$ x^m_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } m\in I \\ 0, & \text{если } m\in J \\ P_{m_\varepsilon}/P_\varepsilon, & \text{если } m\notin I\cup J, \end{cases} $$

удовлетворяют уравнению (2.2) и начальному условию (2.3.). Равенство $\bar{p}=\bar{x}_0$ очевидно. Единственность этого решения будет показана в следующем пункте.

Начальные условия (2.3), как показано на важном примере в § 4, выписываются с легкостью.

Отметим, что система (2.2) при $n>2$ и произвольных начальных условиях (даже аналогичных условиям (2.3), вообще говоря, не имеет решения.

§ 3. *Нахождение вектора* x_0. В этом пункте мы будем придерживаться терминологии ([2]). Множество всех индексов A служит множеством вершин графа (A, Γ), если положить

$$ \Gamma\varepsilon = \begin{cases} \{{}^k\varepsilon;\ 0<k<n+1,\ k\notin I\cup J\}\cup\{{}_k\varepsilon;\ 0<k<n+1,\ k\notin I\cup J\}, \\ r+s<n, \\ \varnothing\quad r+s=n. \end{cases} $$

Для нахождения вектора $\bar{x}_0$ достаточно выделить некоторый подграф (B, Γ_B) графа (A,Γ), выбрав какое-нибудь подмножество индексов B, удовлетворяющее требованиям:

а) $0 \in B$,

б) если $\varepsilon \in B$ и $r + s < n - 1$, то множество $\Gamma_B \varepsilon = \Gamma\varepsilon \cap B$ состоит ровно из четырех индексов ${}^k\varepsilon$, ${}_k\varepsilon$, ${}^l\varepsilon$, ${}_l\varepsilon$, $k \neq l$,

в) если $\varepsilon \in B$ и $r + s = n - 1$, то $\Gamma_B \varepsilon = \varnothing$.

Действительно, рассмотрим подсистему системы уравнений (2.2)

$$\begin{aligned} \bar{x}_\varepsilon &= \bar{x}_{{}^k\varepsilon}\, x_\varepsilon^k + \bar{x}_{{}_k\varepsilon}\,(1 - x_\varepsilon^k), \\ \bar{x}_\varepsilon &= \bar{x}_{{}^l\varepsilon}\, x_\varepsilon^l + \bar{x}_{{}_l\varepsilon}\,(1 - x_\varepsilon^l), \end{aligned} \qquad (3.1)$$

где а) ε пробегает все индексы из B, для которых $r + s < n - 1$,

б) ${}^k\varepsilon$, ${}_k\varepsilon$, ${}^l\varepsilon$, ${}_l\varepsilon \in B$.

Начальное условие (2.3) определяет все вектора $\bar{x}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \Gamma_B^{n-1}\theta$.

Пусть зафиксирован $\varepsilon \in \Gamma_B^{n-2}\theta$. Тогда для этого ε в системе (3.1) найдтся пара векторных уравнений

$$\bar{x}_\varepsilon = \bar{x}_{{}^k\varepsilon}\, x_\varepsilon^k + \bar{x}_{{}_k\varepsilon}\,(1 - x_\varepsilon^k),$$

$$\bar{x}_\varepsilon = \bar{x}_{{}^l\varepsilon}\, x_\varepsilon^l + \bar{x}_{{}_l\varepsilon}\,(1 - x_\varepsilon^l).$$

Соответствующая система $2n$ линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_\varepsilon^1, \cdots, x_\varepsilon^n$ совместна (согласно теореме 2) и имеет единственное решение, так как определитель автономной системы

$$x_\varepsilon^l = p_{l\,{}^k\varepsilon}/p_{{}^k\varepsilon}\, x_n^k + p_{l\,{}_k\varepsilon}/p_{{}_k\varepsilon}\,(1 - x_\varepsilon^k),$$

$$x_\varepsilon^k = p_{k\,{}^l\varepsilon}/p_{{}^l\varepsilon}\, x_\varepsilon^l + p_{k\,{}_l\varepsilon}/p_{{}_l\varepsilon}\,(1 - x_\varepsilon^l),$$

отличен от нуля вследствие допущения, что $P(\bar{\delta}) \neq 0$ для всех $\bar{\delta} \in \Delta$.

Этот же прием позволяет, после того как найдены все $\bar{x}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \Gamma_B^z\theta$, $0 < z < n - 2$, единственным образом определить все $\bar{x}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \Gamma_B^{z-1}\theta$. Эта процедура, таким образом, позволяет найти $\bar{x}_\theta$.

Заметим, что так как для любого $\varepsilon \in A$ можно построить содержащее его множество B, удовлетворяющее условиям а, б, в, то предшествовавшее рассуждение доставляет отсутствовавшее доказательство единственности в теореме 2.

§ 4. *Нахождение начальных условий* (2.3) *для одного класса потоков* П. Предположим, что в формуле

$$\Pi = S + N,$$

поток сигналов S является потоком Пальма (потоком с ограниченным последействием) [1], а поток шумов N является потоком Пуассона.

Пусть $F(u)$ — функция Пальма для потока S; λ — интенсивность потока N.

Будем предполагать, что существует $f(u) = -F'(u)$, причем

$$f(u) > 0, \quad 0 < u < t.$$

Последнее условие гарантирует выполнение соотношения $P(\bar{\delta}) > 0$ при любом $\bar{\delta} \in \Delta$.

Величина P_m/P в формуле (2.3) является условной вероятностью того, что импульс, пришедший в момент времени t_m, является в действительности сигналом при условии, что принадлежность всех остальных $n-1$ импульсов известна.

При сделанных предположениях формула Байеса для вероятностей гипотез дает следующее выражение для этой условной вероятности

$$
\frac{P_m}{P} = \begin{cases}
\dfrac{f(\tau_1) f(\tau_2)}{\lambda f(\tau_1+\tau_2) + f(\tau_1) f(\tau_2)}, & \text{если } \min\limits_{i \in I} i < m < \max\limits_{i \in I} i \\[2ex]
\dfrac{F(\tau_1) f(\tau_2)}{\lambda F(\tau_1+\tau_2) + F(\tau_1) f(\tau_2)}, & \text{если } m < \min\limits_{i \in I} i \\[2ex]
\dfrac{f(\tau_1) F(\tau_2)}{\lambda F(\tau_1+\tau_2) + f(\tau_1) F(\tau_2)}, & \text{если } m > \max\limits_{i \in I} i \\[2ex]
\dfrac{F(\tau_1) F(\tau_2)}{\lambda \int\limits_{t}^{\infty} F(u)\,du + F(\tau_1) F(\tau_2)}, & \text{если множество } I \text{ пусто.}
\end{cases}
$$

Величины τ_1 и τ_2 в указанных четырех случаях предыдущей формулы имеют смысл

$$\tau_1 = t_m - t_{\max\limits_{i \in I,\, i < m} i}; \quad \tau_2 = t_{\min\limits_{i \in I,\, i > m} i} - t_m, \quad \text{если} \quad \min_{i \in I} i < m < \max_{i \in I} i$$

$$\tau_1 = t_m; \quad \tau_2 = t_{\min\limits_{i \in I,\, i > m} i} - t_m, \quad \text{если} \quad m < \min_{i \in I} i$$

$$\tau_1 = t_m - t_{\max\limits_{i \in I,\, i < m} i}; \quad \tau_2 = t - t_m, \quad \text{если} \quad m > \max_{i \in I} i$$

$$\tau_1 = t_m; \quad \tau_2 = t - t_m, \text{ если множество } I \text{ пусто.}$$

Важным при получении этой формулы является тот факт, что моменты появления сигналов, когда поток S является потоком с ограниченным последействием, а поток шумов N — потоком Пуассона, являются точками регенерации для потока П.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ազդանշանների զատումը իմպուլսների հոսքից

Ենթադրենք, որ իմպուլսների Π հոսքը հանդիսանում է երկու բաղադրիչ հոսքերի գումար (վերադրում)։

$$\Pi = S + N$$

որտեղ S-ը հանդիսանում է Պալմի, իսկ N-ը Պուասոնի հոսք։

Անվանենք S հոսքի իմպուլսները ազդանշաններ, իսկ N հոսքի իմպուլսները՝ աղմուկներ։

Ենթադրենք, որ հայտնի են (0, t) միջակայքում իմպուլսների երևան գալու $t_1, \ldots, t_n$ մոմենտները, սակայն հայտնի չէ իմպուլսներից որոնք են հանդիսանում ազդանշաններ: Մյուս կողմից, թող մեզ հայտնի լինի ազդանշանների հոսքը բնորոշող Պալմի ֆունկցիան, ինչպես նաև աղմուկների հոսքի ինտենսիվությունը:

Հոդվածում առաջարկված է ազդանշանները աղմուկներից զատելու օպտիմալ եղանակ՝ կորուստների ֆունկցիայի (1.1) մինիմացնելու իմաստով: Ցույց է տրված, որ հաջորդաբար լուծելով վերջավոր թվով հանրահաշվային գծային հավասարումները վերջավոր սիստեմները, հնարավոր է գտնել պայմանական հավանականությունները p_i, որ t_i մոմենտին երևան եկած իմպուլսը ազդանշան է հանդիսանում: $p = \{p_1, \ldots, p_n\}$ վեկտորի հայտնի լինելը բավական է խնդիրը լուծելու համար:

Այն դեպքի համար, երբ Պալմի ֆունկցիան ունի $f(u)$ ածանցյալ և ամենուրեք (0, t) միջակայքում $f(u) > 0$, ապացուցված է այդ սիստեմների լուծման գոյությունը և միակությունը:

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Я. Хинчин*, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Матем. ин-та АН, 49 (1955), стр. 1—123. [2] *К. Берж*, Теория графов и ее применения, М., 1962.