

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

О приближенном решении задачи Коши для некоторых
 дифференциальных уравнений с полиномиальными
 коэффициентами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/XI 1963)

В этой заметке изучается вопрос о построении приближенного решения корректно поставленных задач Коши для некоторых систем линейных дифференциальных уравнений, причем приближенные решения строятся так, что их сходимость к точному решению становится следствием корректности задачи.

Рассмотрим уравнение

$$M(t)u - L(t, x)u = f(t, x) \quad (1)$$

при начальных условиях:

$$u \Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x), \quad (2)$$

где

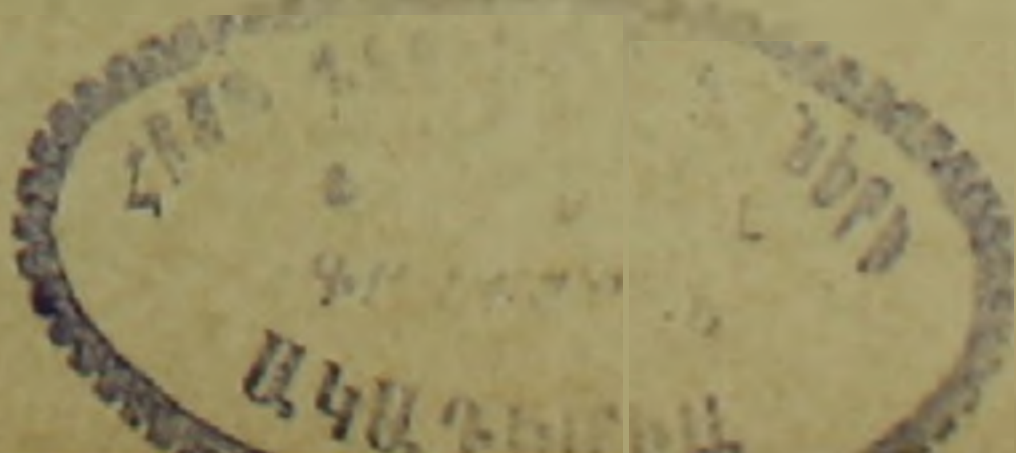
$$M(t) = \sum_{k=0}^m a_k(t) \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad a_m(t) \neq 0,$$

$$L(t, x) = \sum_{k=1}^s \sum_{i_0+|i|=k} b_{i_0, i}(t, x) \frac{\partial^k}{\partial t^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}},$$

$$i_0 < m, \quad b_{i_0, i}(t, x) = \sum_{k=1}^{s_{i_0, i}} b_k(t) q_k^{(i)}(x).$$

Теорема. Пусть $f(t, x) = \sum_{i=1}^N c_i(t) p_i(x)$, $a_k(t)$, $b_k(t)$, $c_i(t)$

непрерывные функции, $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$, $p_i(x)$ и $q_k^{(i)}(x)$ полиномы, причем $q_k^{(i)}(x)$ степени не выше $|i| - 1$. Тогда решение задачи (1), (2) можно свести к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $M(t)v(t) = h(t)$.



В самом деле, пусть $v_i(t)$ решение следующей задачи Коши

$$M(t)v(t) = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i \\ 0 & \text{при } k \neq i \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (4)$$

Составим функцию

$$v(t, x) = \sum_{i=0}^{m-1} v_i(t) \varphi_i(x),$$

которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям (2).

Пусть A оператор, который сопоставляет каждой непрерывной функции $h(t)$ решение $u(t)$ следующей задачи Коши

$$M(t)u(t) = h(t),$$

$$\left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Составим функцию

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^N A c_i(t) p_i(x).$$

Легко видеть, что функция $u_0(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$Mu_0(t, x) = f(t, x) \quad (5)$$

и начальным условиям (2). Легко видеть далее, что $L(t, x)u_0(t, x)$ имеет вид

$$L(t, x)u_0(t, x) = \sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(1)}(t) p_i^{(1)}(x),$$

где $c_i^{(1)}(t)$ непрерывные функции от t .

Рассмотрим теперь функцию

$$u_1(t, x) = \sum_{i=1}^{N_1} A c_i^{(1)}(t) p_i^{(1)}(x) = AL(t, x)u_0(t, x),$$

которая удовлетворяет уравнению

$$M(t)u_1(t, x) = L(t, x)u_0(t, x)$$

и нулевым начальным условиям.

Пусть $L(t, x)u_1(t, x) = \sum_{i=1}^{N_2} c_i^{(2)}(t) p_i^{(2)}(x)$ и пусть l максимум степеней полиномов $p_i^{(1)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N_1$), тогда $p_i^{(2)}(x)$ будут полиномами степени не выше $l-1$.

Положим по определению

$$u_k(t, x) = AL(t, x)u_{k-1}(t, x),$$

тогда будем иметь

$$L(t, x) u_k(t, x) = \sum_{l=1}^{N_{k+1}} c_l^{(k+1)}(t) p_l^{(k+1)}(x).$$

Легко видеть по индукции, что $c_l^{(k+1)}(t)$ непрерывные функции, а $p_l^{(k+1)}(x)$ полиномы степени не выше $l - k$, кроме того, $u_k(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$M(t) u_k(t, x) = L(t, x) u_{k-1}(t, x) \quad (6)$$

и нулевым начальным условиям.

Учитывая (5) и (6) легко показать, что функция

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{l+1} u_k(t, x)$$

является решением задачи (1), (2).

В самом деле,

$$Mu = \sum_{k=0}^{l+1} Mu_k = Mu_0 + \sum_{k=1}^{l+1} Mu_k = f(t, x) + \sum_{k=1}^{l+1} Lu_{k-1} = f(t, x) + \sum_{k=0}^l Lu_k,$$

$$Lu = \sum_{k=0}^{l+1} Lu_k = \sum_{k=0}^l Lu_k,$$

поскольку $Lu_{l+1} = 0$.

$u(t, x)$ удовлетворяет также и начальным условиям, поскольку $u_0(t, x)$ удовлетворяет этим условиям, а остальные $u_k(t, x)$ удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Таким образом, если нам известна требуемая точность и характер корректности данной задачи Коши, то аппроксимируя правые части и начальные условия полиномами, мы можем построить иско-мое приближенное решение путем решения задачи Коши только для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения.

Например, для гиперболических уравнений второго порядка

$$L_1 u = u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u_t + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au = f$$

характер корректности задачи Коши можно получить из хорошо известного энергетического неравенства (см., например, (1))

$$\int_{Q_t} (u^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2) dx dt \leq c(t) \left[\int_{\dot{Q}_t} (L_1 u)^2 dx dt + \int_{\Omega_0} (u^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \right]$$

справедливое для любой функции $u \in W_2^2(Q_t)$, где Q_t — усеченный конус с гладкой пространственно ориентированной боковой поверхностью, нижнее основание Ω_0 которого лежит в плоскости $t = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Требование непрерывности функций от t , входящих в уравнение (1), достаточно для решений соответствующих за-

дач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и построения функций $u_k(t, x)$ с вышеуказанными свойствами, однако это требование непрерывности не является необходимым для применимости теоремы.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (7)$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi_0(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

Известно существование и единственность решения этой задачи (2).

Обозначим через ν степень полинома $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$. Легко получить, что $v_0(t) = 1$, $v_1(t)$ можно взять равным нулю, поскольку она умножается на $\varphi_1(x) = 0$,

$$Ac_k^{(k)}(t) = \frac{t^{2k}}{\prod_{i=1}^k (2i)^2}, \quad u_k(t, x) = \frac{t^{2k}}{\prod_{i=1}^k (2i)^2} \Delta^k \varphi_0(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$u_0(t, x) = \varphi_0(x)$. Следовательно, решением этой задачи будет функция

$$u(t, x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\prod_{i=1}^k (2i)^2} \Delta^k \varphi_0(x),$$

где τ — целое число больше $\frac{\nu}{2}$.

Замечание 2. Если все члены оператора $L(t, x)$ содержат хотя бы одно дифференцирование по некоторому x_r , т. е. если $i_r \geq 1$, то достаточно потребовать чтобы $q_k^{(i)}(x)$ были полиномами от x , степени не выше $i_r - 1$ с достаточно гладкими коэффициентами, зависящими от остальных переменных. В этом случае такое расширение условий относится также к правым частям и начальным функциям.

Замечание 3. Этим же методом, при аналогичных ограничениях можно решить задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(t) \vec{u} - \sum_{k=1}^{\tau} \sum_{|i|+|j|=k} B_{i,j}(t, x) \frac{\partial^k \vec{u}}{\partial t^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \vec{\Phi}(t, x),$$

$$\vec{u} \Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x).$$

**Քաղմանդամային գործակիցներով որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների
համար կոշու խնդրի մոտավոր լուծման մասին**

Աշխատության մեջ ղիտարկվում է բաղմանդամային գործակիցներով որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների համար կոշուկա ղրված կոշու խնդրի մոտավոր լուծման հարցը: Մոտավոր լուծումները կառուցվում են աշխատ, որ նրանց ղուղամիտությունը ղառնում է խնդրի կոշուկության հետևանք:

(1), (2) կոշու խնդրի համար աղացուցվում է հետևյալ թևորեմը:

$$\text{Թևորեմ — Եթև} \quad f(t, x) = \sum_{l=1}^N c_l(t) p_l(x), \quad a_k(t), b_k(t) \text{ և } c_l(t) \quad \text{ֆուկ-}$$

ցիաներն աճընդհատ են, $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), p_l(x) \text{ և } q_k^{(i)}(x)$ -երը բաղմանղամներ են, ընղ որում $Q_k^{(i)}(x)$ -երը $|i| = 1$ -իղ ոշ բարձր առաիճանի, աղա (1), (2) կոշու խնդրի լուծումը կարելի է բերել հետևյալ սղորական դիֆերենցիալ հավասարման $M(t)v(t) = h(t)$ համար կոշու խնդրի լուծմանը:

Այն ղեպքում, երբ (1), (2) կոշու խնղիրը ղրված է կոշուկա և մեղ հայտնի է կոշուկության ընույթը, աղա մոտարկելղղ աջ մասը և սկղրնական սղամանները բաղմանղամներղղ, կարող ենք կառուցել որոնելի մոտավոր լուծումը տղած ճղտությունը, լուծելղղ միայն կոշու խնղրի համաղղատաղղալան սղորական դիֆերենցիալ հավասարման համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ О. А. Ладыженская, ДАН СССР, 102, № 1 (1955). ² Ф. Т. Барановский, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 6, 19 (1960).