

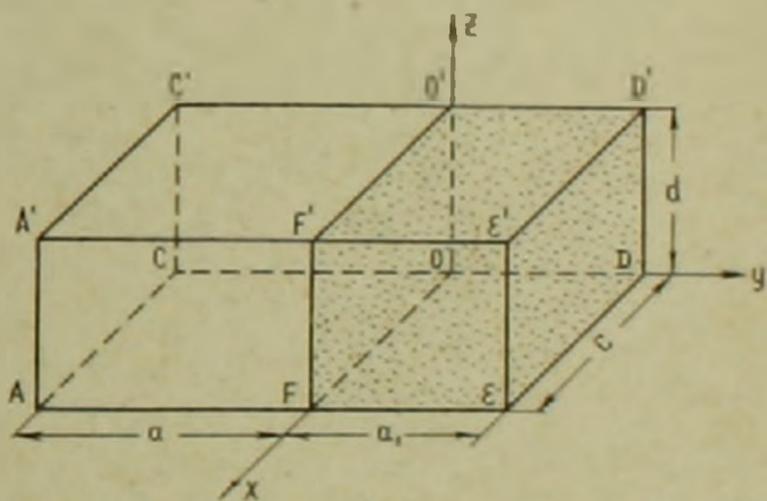
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одной задаче установившегося распространения тепла в
 составном прямоугольном параллелепипеде

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9 XII 1963)

В настоящей работе приводится эффективное решение задачи установившегося распространения тепла в неоднородном прямоугольном параллелепипеде, составленном из двух сред с различными теплофизическими характеристиками (фиг. 1), когда на части границы $ODD'O'$, $EDD'E'$ и $FEE'F'$ происходит теплообмен с окружающей средой, а на остальной части границы задано распределение температуры. Предполагаем, что внутри параллелепипеда имеются источники тепла.



Фиг. 1.

Обозначим через $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ соответственно функции распределения тепла в параллелепипеде при $y \leq 0$ и при $y \geq 0$. Тогда функции $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$, как известно⁽¹⁾, будут удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda_1} Q_1(x, y, z) \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

и граничным условиям

$$U_1(0, y, z) = R_1^{(1)}(y, z), \quad U_1(c, y, z) = R_2^{(1)}(y, z),$$

$$-\frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 [P_1(y, z) - U_2(0, y, z)];$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=c} = h_2 [P_2(y, z) - U_2(c, y, z)],$$

$$U_1(x, -a, z) = T_1(x, z); \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=a_1} = h_0 [T_2(x, z) - U_2(x, a_1, z)], \quad (2)$$

$$U_1(x, y, 0) = S_1^{(1)}(x, y); \quad U_1(x, y, d) = S_2^{(1)}(x, y),$$

$$U_2(x, y, 0) = S_1^{(2)}(x, y); \quad U_2(x, y, d) = S_2^{(2)}(x, y),$$

а также условиям сопряжения на поверхности раздела

$$U_1(x, 0, z) = U_2(x, 0, z), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (3)$$

Здесь λ_i — коэффициент теплопроводности i -й среды; $Q_i(x, y, z)$ — интенсивность тепловыделения; h_0, h_1, h_2 , а также T_2, P_1, P_2 — соответственно коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды у граней $EDD'E'$; $ODD'O'$ и $FEE'F'$.

Относительно функций Q_i, P_i и T_2 предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию, что касается функций $S_i, R_i^{(1)}$ и T_1 , то предполагаем, что они непрерывны в соответствующих областях и что

$$R_1^{(1)}(y, 0) = S_1^{(1)}(0, y); \quad R_1^{(1)}(y, d) = S_2^{(1)}(0, y); \quad R_1^{(1)}(-a, z) = T_1(0, z);$$

$$R_2^{(1)}(y, 0) = S_1^{(1)}(c, y)$$

$$R_2^{(1)}(y, d) = S_2^{(1)}(c, y); \quad R_2^{(1)}(-a, z) = T_1(c, z);$$

$$S_1^{(1)}(x, -a) = T_1(x, 0); \quad S_2^{(1)}(x, -a) = T_1(x, d).$$

Разложим предварительно функции $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ в ряд по $\sin \alpha_k z$:

$$U_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(i)}(x, y) \sin \alpha_k z \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{d}, \quad U_k^{(i)}(x, y) = \frac{2}{d} \int_0^d U_i(x, y, z) \sin \alpha_k z dz.$$

Умножив уравнение (1) на $\frac{2}{d} \sin \alpha_k z dz$ и проинтегрировав от 0 до d , для $U_k^{(i)}(x, y)$ получим следующее уравнение

$$\frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_k^{(i)}}{\partial y^2} - \alpha_k^2 U_k^{(i)} = -\frac{2}{d} \left\{ \frac{1}{\lambda_i} \int_0^d Q_i(x, y, z) \sin \alpha_k z dz + \right. \\ \left. + \alpha_k [S_1^{(i)}(x, y) - (-1)^k S_2^{(i)}(x, y)] \right\} = q_k^{(i)}(x, y). \quad (5)$$

При этом граничные условия и условия сопряжения для функций $U_k^{(1)}(x, y)$ и $U_k^{(2)}(x, y)$, согласно (2) и (3), будут

$$U_k^{(1)}(0, y) = R_{k1}^{(1)}(y); \quad U_k^{(1)}(c, y) = R_{k2}^{(1)}(y),$$

$$-\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 [P_{k1}(y) - U_k^{(2)}(0, y)],$$

$$\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=c} = h_1 [P_{k2}(y) - U_k^{(2)}(c, y)],$$

(2')

$$U_k^{(1)}(x, -a) = T_{k1}(x); \quad \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=a_1} = h_0 [T_{k2}(x) - U_k^{(2)}(x, a_1)];$$

$$U_k^{(1)}(x, 0) = U_k^{(2)}(x, 0); \quad \lambda_1 \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda_2 \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3')$$

где

$$P_{ki}(y) = \frac{2}{d} \int_0^d P_i(y, z) \sin \alpha_k z dz,$$

$$R_{ki}(y) = \frac{2}{d} \int_0^d R_i^{(1)}(y, z) \sin \alpha_k z dz, \quad T_{ki}(x) = \frac{2}{d} \int_0^d T_i(x, z) \sin \alpha_k z dz.$$

Разложим далее $U_k^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, 2$) в ряды по $\sin \gamma_j x$:

$$U_k^{(i)}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{jk}^{(i)}(y) \sin \gamma_j x, \quad (6)$$

где

$$\gamma_j = \frac{j\pi}{c}; \quad f_{jk}^{(i)}(y) = \frac{2}{c} \int_0^c U_k^{(i)}(x, y) \sin \gamma_j x dx.$$

Умножая уравнение (5) на $\frac{2}{c} \sin \gamma_j x dx$ и интегрируя от 0 до c , для $f_{jk}^{(i)}(y)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$f_{jk}^{(i)'}(y) - (\alpha_k^2 + \gamma_j^2) f_{jk}^{(i)}(y) = \frac{2}{c} \left\{ \int_0^c q_k^{(i)}(x, y) \sin \gamma_j x dx - \right. \\ \left. - \gamma_j \int_0^d [R_1^{(i)}(y, z) - (-1)^i R_2^{(i)}(y, z)] \sin \alpha_k z dz \right\} = q_{jk}^{(i)}(y) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Здесь через $R_1^{(2)}(y, z)$ и $R_2^{(2)}(y, z)$ обозначены неизвестные значения функции $U_2(x, y, z)$ на гранях $ODD'O'$ и $FEE'F'$: $R_1^{(2)}(y, z) = U_2(0, y, z)$; $R_2^{(2)}(y, z) = U_2(c, y, z)$. Краевые условия для $f_{jk}^{(1)}(y)$ и $f_{jk}^{(2)}(y)$, согласно (2') и (3'), будут

$$f_{jk}^{(1)}(-a) = T_{jk}^{(1)}; \quad f_{jk}^{(1)}(0) = f_{jk}^{(2)}(0); \quad \lambda_1 f_{jk}^{(1)'}(0) = \lambda_2 f_{jk}^{(2)'}(0), \quad (8)$$

$$f_{jk}^{(2)'}(a_1) - h_0 f_{jk}^{(2)}(a_1) = h_0 T_{jk}^{(2)};$$

где

$$T_{jk}^{(j)} = \frac{2}{c} \int_0^c T_{kl}(x) \sin \gamma_j x dx.$$

Удовлетворяя краевым условиям (8), для $f_{jk}^{(1)}(y)$ и $f_{jk}^{(2)}(y)$ получим следующие выражения

$$\begin{aligned} f_{jk}^{(1)}(y) = & \frac{1}{L_{jk}(-a)} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_{jk}(y+a) \left[2h_0 T_{jk}^{(2)} - \frac{2}{\gamma_{jk}} \int_0^{a_1} q_{jk}^{(2)}(t) M_{jk}(t) dt - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^0 q_{jk}^{(1)}(t) L_{jk}(t) dt \right] + L_{jk}(y) \left[T_{jk}^{(1)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_a^y q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk}(t+a) dt \right] \right\}, \\ f_{jk}^{(2)}(y) = & \frac{2}{L_{jk}(-a)} \left\{ N_{jk}(y) \left[h T_{jk}^{(2)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^{a_1} q_{jk}^{(2)}(t) M_{jk}(t) dt \right] + \right. \\ & \left. + M_{jk}(y) \left[\lambda T_{jk}^{(1)} - \frac{\lambda}{\gamma_{jk}} \int_{-a}^0 q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk}(t-a) dt - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^y q_{jk}^{(2)}(t) N_{jk}(t) dt \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения

$$\gamma_{jk} = \sqrt{\alpha_k^2 + \gamma_j^2}; \quad \lambda = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}; \quad M_{jk}(y) = \gamma_{jk} \operatorname{ch} \gamma_{jk}(a_1 - y) + h_0 \operatorname{sh} \gamma_{jk}(a_1 - y),$$

$$N_{jk}(y) = \lambda \operatorname{ch} \gamma_{jk} a \operatorname{sh} \gamma_{jk} y + \operatorname{sh} \gamma_{jk} a \operatorname{ch} \gamma_{jk} y, \quad (10)$$

$$L_{jk}(y) = (\lambda + 1) M_{jk}(-y) + (\lambda - 1) M_{jk}(y).$$

В выражения (9) для $f_{jk}^{(1)}(y)$ и $f_{jk}^{(2)}(y)$ входят, как было отмечено выше, неизвестные функции $R_{k1}^{(2)}(y, z)$ и $R_{k2}^{(2)}(y, z)$. Прежде чем перейти к их определению, заметим следующее: вследствие неоднородности граничных условий для $U_k^{(1)}(x, y)$ и $U_k^{(2)}(x, y)$, ряды (6) обладают медленной сходимостью — коэффициенты $f_{jk}^{(j)}(y)$ их с возрастанием индекса j убывают со скоростью $\frac{1}{j}$. Для усиления сходимости рядов (6) выделим выражения

$$w_k^{(j)}(x, y) = \left(1 - \frac{x}{c}\right) R_{k1}^{(j)}(y) + \frac{x}{c} R_{k2}^{(j)}(y),$$

обуславливающие слабую сходимость рядов (6). Разлагая эти выражения в ряд по $\sin \gamma_j x$ и прибавляя и вычитывая их из выражений (6), будем иметь

$$U_k^{(1)}(x, y) = w_k^{(1)}(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{jk}^{(1)}(y) - 2 \frac{R_{k1}^{(1)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(1)}(y)}{\gamma_j c} \right] \sin \gamma_j x. \quad (11)$$

Ряды (11) обладают усиленной сходимостью — члены их убывают с возрастанием индекса j со скоростью $\frac{1}{j^2}$.

Перейдем теперь к определению неизвестных функций $R_{k1}^{(2)}(y)$ и $R_{k2}^{(2)}(y)$. Для этого выполним граничные условия (2') для функции $U_k^{(2)}(x, y)$:

$$\frac{(1 + h_1 c) R_{k1}^{(2)}(y) - R_{k2}^{(2)}(y)}{c} - \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \left[f_{jk}^{(2)}(y) - 2 \frac{R_{k1}^{(2)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(2)}(y)}{\gamma_j c} \right] = h_1 P_{k1}(y), \quad (12)$$

$$\frac{R_{k1}^{(2)}(y) - (1 + h_2 c) R_{k2}^{(2)}(y)}{c} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \gamma_j \left[f_{jk}^{(2)}(y) - 2 \frac{R_{k1}^{(2)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(2)}(y)}{\gamma_j c} \right] = h_2 P_{k2}(y).$$

Умножим каждое из уравнений (12) на $\varphi_l(y) dy$, где $\varphi_l(y) = \sqrt{\frac{2(\zeta_l^2 + h_0^2)}{a_1(\zeta_l^2 + h_0^2) + h_0}} \sin \zeta_l y$ — собственные функции краевой задачи

$$\varphi''(y) + \zeta^2 \varphi(y) = 0; \quad \varphi(0) = \varphi'(a_1) + h_0 \varphi(a_1) = 0, \quad (13)$$

а собственные числа ζ_l являются корнями уравнения $\zeta \cos \zeta a_1 + h_0 \sin \zeta a_1 = 0$.

Принимая во внимание (7) и (8), после некоторых преобразований получим

$$n_{lk}^{(s)} = \frac{\zeta_l^2}{\zeta_{lk}^2 + (h_1 + h_2) \zeta_{lk} \operatorname{cth} \zeta_{lk} c + h_1 h_2} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda + 1} c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+s}] G_{lk}^{(s)} - [1 - (-1)^{j+s}] (h_1 - h_2)}{\gamma_{jk}^2 + \zeta_l^2} m_{jk} + \frac{1}{2\varphi_l'(0)} [G_{lk}^{(s)} \rho_{lk}^{(s)} - (h_1 - h_2) \rho_{lk}^{(s+1)}] \right\} \quad (s = 1; 2). \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения



$$n_{lk}^{(s)} = \frac{\zeta_l^2}{\varphi_l'(0)} \int_0^{a_1} [R_{k1}^{(2)}(y) - (-1)^s R_{k2}^{(2)}(y)] \varphi_l(y) dy,$$

$$\zeta_{lk} = \sqrt{a_k^2 + \zeta_l^2}; \quad m_{jk} = \frac{\sqrt{\lambda + 1}}{2} \gamma_j c f_{jk}^{(2)}(0),$$

$$G_{lk}^{(s)} = 2\zeta_{lk} \frac{\operatorname{ch} \zeta_{lk} c + (-1)^s}{\operatorname{sh} \zeta_{lk} c} + h_1 + h_2, \quad (15)$$

$$\rho_{lk}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{sh} \zeta_{lk} c} \int_0^c \left[h_0 \varphi_l(a_1) T_{k2}(x) - \frac{2}{d} \int_0^{a_1} q_k^{(2)}(x, y) \varphi_l(y) dy \right] [\operatorname{sh} \zeta_{lk}(c-x) - (-1)^s \operatorname{sh} \zeta_{lk} x] dx + \int_0^{a_1} [h_1 P_{k1}(y) - (-1)^s P_{k2}(y)] \varphi_l(y) dy.$$

В свою очередь m_{jk} , согласно (9) и (15), определяются посредством $n_{lk}^{(s)}$ из следующих соотношений

$$\begin{aligned} m_{jk} = & \frac{\sqrt{\lambda + 1} \gamma_j c}{2L_{jk}(-a)} \left\{ \operatorname{sh} \gamma_{jk} a \frac{\gamma_j}{c} \frac{M_{jk}(0)}{\gamma_{jk}} \times \right. \\ & \times \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l'^2(0) \frac{[1 - (-1)^j] n_{lk}^{(1)} + [1 + (-1)^j] n_{lk}^{(2)}}{\zeta_l^2 (\zeta_l^2 + \gamma_{jk}^2)} + \\ & \left. + \operatorname{sh} \gamma_{jk} a \left[h_0 T_{jk}^{(2)} - \frac{2}{\gamma_{jk}} \int_0^{a_1} \int_0^c q_k^{(2)}(x, y) M_{jk}(y) \sin \gamma_j x dx dy \right] + \right. \\ & \left. + \lambda M_{jk}(0) \left[T_{jk}^{(1)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_{-a}^0 q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk}(t+a) dt \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, для определения $n_{lk}^{(s)}$ и m_{jk} получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (14) и (16). Для исследования разрешимости этих систем рассмотрим предварительно суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений. Обозначим через $\varepsilon_{lk}^{(s)}$ сумму модулей коэффициентов l -го уравнения системы (14), а через τ_{jk} — сумму модулей коэффициентов j -го уравнения системы (16). Пользуясь легко получаемой формулой разложения

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varphi_l'(0) \varphi_l(x)}{\zeta_l^2 (\zeta_l^2 + \gamma^2)} = \frac{1}{\gamma^2} \left[1 - \frac{h_0 x}{1 + h_0 a_1} - \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma (a_1 - x) + h_0 \operatorname{sh} \gamma (a_1 - x)}{\gamma \operatorname{ch} \gamma a_1 + h_0 \operatorname{sh} \gamma a_1} \right], \quad (0 \leq x \leq a_1) \quad (17)$$

имеем

$$\tau_{jk} = \frac{2\gamma_j^2 \operatorname{sh} \gamma_{jk} a}{\sqrt{\lambda+1} \gamma_j^3 L_{jk}(-a)} \left[\gamma_{jk} (\gamma_{jk} \operatorname{sh} \gamma_{jk} a_1 + h_0 \operatorname{ch} \gamma_{jk} a_1) - \frac{h_0 M_{jk}(0)}{1 + h_0 a_1} \right] < \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}. \quad (18)$$

Легко получаем также, что $\sigma_{jk}^{(s)} < \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}$. С другой стороны, из (15) и (16) видно, что свободные члены систем, оставаясь ограниченными в своей совокупности, стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{\gamma_{jk}}$ и $\frac{1}{\zeta_{jk}}$.

Согласно общей теории бесконечных систем⁽²⁾, системы (14) и (16) имеют единственное ограниченное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Как легко видеть, m_{jk} и $n_{jk}^{(s)}$ соответственно убывают со скоростью $\frac{1}{\gamma_{jk}}$ и $\frac{1}{\zeta_{jk}}$. В самом деле, обозначив $m_{jk} = \gamma_{jk}^{-\frac{1}{2}} \mu_{jk}$, $n_{jk}^{(s)} = \zeta_{jk}^{-\frac{1}{2}} \eta_{jk}^{(s)}$, для неизвестных μ_{jk} и $\eta_{jk}^{(s)}$ получим после некоторых преобразований вполне регулярные системы линейных уравнений, свободные члены которых, оставаясь ограниченными в своей совокупности, стремятся к нулю со скоростью $\frac{1}{\gamma_{jk}}$ и $\frac{1}{\zeta_{jk}}$. Согласно⁽²⁾, полученные системы имеют единственное ограниченное решение, откуда и следует наше утверждение.

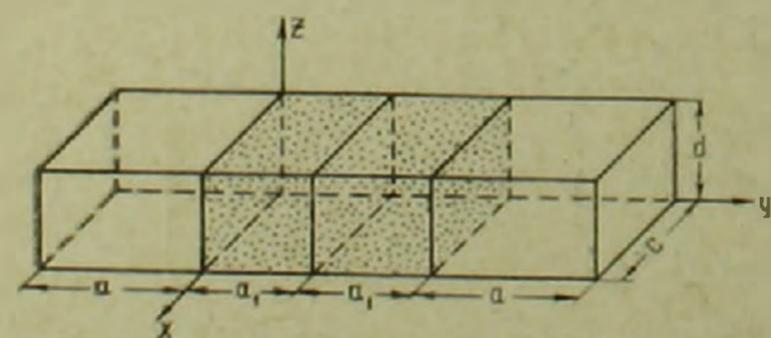
Подставляя значение $f_{jk}^{(1)}(y)$ в (6) и (4) и используя (14), (15) и (16), а также выделяя выражения, обуславливающие слабую сходимость, после несложных преобразований окончательно получим для $U_1(x, y, z)$ следующее выражение

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) = & \left(1 - \frac{z}{d}\right) \left[S_1^{(1)}(x, y) - \left(1 - \frac{x}{c}\right) S_1^{(1)}(0, y) - \right. \\ & \left. - \frac{x}{c} S_1^{(1)}(c, y) \right] + \frac{z}{d} \left[S_2^{(1)}(x, y) - \left(1 + \frac{x}{c}\right) S_2^{(1)}(0, y) - \right. \\ & \left. - \frac{x}{c} S_2^{(1)}(c, y) \right] + \left(1 - \frac{x}{c}\right) R_1^{(1)}(y, z) + \frac{x}{c} R_2^{(1)}(y, z) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \gamma_{jk} (y+a)}{\operatorname{sh} \gamma_{jk} a} \left[\frac{2m_{jk}}{\sqrt{\lambda+1} \gamma_j c} + \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^0 q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk} t dt \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\operatorname{sh} \gamma_{jk} y}{\operatorname{sh} \gamma_{jk} a} \left[T_{jk}^{(1)} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_{-a}^y q_{jk}^{(1)}(t) \operatorname{sh} \gamma_{jk} (t+a) dt \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\alpha_k d} [S_{j1}^{(1)}(y) - (-1)^k S_{j2}^{(1)}(y)] - \frac{2}{\gamma_j c} [R_{k1}^{(1)}(y) - (-1)^j R_{k2}^{(1)}(y)] + \\
& + \frac{4}{\alpha_k \gamma_j c d} [S_1^{(1)}(0, y) - (-1)^j S_1^{(1)}(c, y) - (-1)^k S_2^{(1)}(0, y) + \\
& + (-1)^{j+k} S_2^{(1)}(c, y)] \Big\} \sin \alpha_k z \sin \gamma_j x. \quad (19)
\end{aligned}$$

Для $U_2(x, y, z)$ аналогичным образом получим

$$\begin{aligned}
U_2(x, y, z) = & \left(1 - \frac{z}{d}\right) \left[S_1^{(2)}(x, y) - \left(1 - \frac{x}{c}\right) S_1^{(2)}(0, y) - \right. \\
& - \left. \frac{x}{c} S_1^{(2)}(c, y) \right] + \frac{z}{d} \left[S_2^{(2)}(x, y) - \left(1 - \frac{x}{c}\right) S_2^{(2)}(0, y) - \right. \\
& - \left. \frac{x}{c} S_2^{(2)}(c, y) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh } \gamma_{jk} y}{M_{jk}(0)} \left[h_0 T_{jk}^{(2)} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_y^{a_1} \int_0^c q_k^{(2)}(r, t) M_{jk}(t) \sin \gamma_j r dr dt \right] + \right. \\
& + \left. \frac{M_{jk}(y)}{M_{jk}(0)} \left[\frac{2m_{jk}}{V \lambda + 1 \gamma_j c} - \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^y \int_0^c q_k^{(2)}(r, t) \text{sh } \gamma_{jk} t \sin \gamma_j r dr dt \right] - \right. \\
& - \frac{2}{\alpha_k d} [S_{j1}^{(2)}(y) - (-1)^k S_{j2}^{(2)}(y)] + \frac{4}{\alpha_k \gamma_j c d} [S_1^{(2)}(0, y) - (-1)^j S_1^{(2)}(c, y) - \\
& - (-1)^k S_2^{(2)}(0, y) + (-1)^{j+k} S_2^{(2)}(c, y)] \Big\} \sin \alpha_k z \sin \gamma_j x + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varphi_l(0) \varphi_l(y)}{\zeta_l^2 \text{sh } \zeta_{lk} a_1} [(n_{lk}^{(1)} + n_{lk}^{(2)}) \text{sh } \zeta_{lk} (a_1 - x) + \\
& + (n_{lk}^{(1)} - n_{lk}^{(2)}) \text{sh } \zeta_{lk} x] \sin \alpha_k z. \quad (20)
\end{aligned}$$



Фиг. 2.

Задаваясь геометрическими размерами параллелепипеда, а также значениями величин λ_l , h_l и функций Q_i , $R_i^{(1)}$, P_i , T_i , S_i , из (14) и (16) получим оценки m_{jk} и $n_{lk}^{(s)}$ сверху и снизу, после чего способом, изложенным в (3), найдем из (19) и (20) значения $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ с избытком и недостатком.

В заключение отметим некоторые из частных случаев.

а) Если $h_0 = 0$, то, аналитически продолжая, получим трехслойный параллелепипед, симметричный относительно плоскости $y = a_1$

(фиг. 2). б) Если $h_1 \rightarrow \infty$, $h_2 \rightarrow \infty$, бесконечные системы линейных уравнений (14) и (16) вырождаются в равенства и решение совпадает с решением, получаемым обычным способом. в) При $a \rightarrow \infty$ имеем полубесконечную составную призму. г) Если $\lambda_1 = \lambda_2$, получаем однородный параллелепипед.

Заметим, что в случае плоского распределения тепла аналогичная задача при $h_0 = h_1 = h_2$ и для однородной среды была решена в работе (4).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Բաղադրյալ ուղղանկյան զուգահեռաներում ջերմության կայունացած տարածման մի խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է երկու տարբեր նյութերից կազմված անհամասեռ ուղղանկյուն զուգահեռանիստում ջերմության կայունացած տարածման խնդիրը, երբ արտաքին մակերևույթի մի մասում (այն է՝ $ODD'O'$, $EDD'E'$ և $FEE'F'$ -ի վրա) տեղի ունի ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ, իսկ մնացած մասում տրված է ջերմության բաշխումը: Ենթադրվում է, որ զուգահեռանիստի ներքը զոյություն ունի ջերմարտադրություն:

Խնդրի լուծումը տրվում է արագ զուգամիտող կրկնակի շարքերի միջոցով, որոնց հաստատուն գործակիցները որոշվում են լրավին սեղույնար հանրահաշվական անվերջ սխառեմներից: Դիտարկվում են որոշ մասնավոր դեպքեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. В. Лыков, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1952. ² Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962. ³ Р. С. Минасян, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, XI, 3 (1958). ⁴ Р. С. Минасян, ПММ, XVI, 3, 1952.