

В. А. Яврян

О некоторых возмущениях самосопряженных операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/XI 1963)

В дальнейшем A — самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H , $D(A)$ — область определения оператора A , $\rho(A)$ — множество регулярных точек A , а $R_z = (A - zI)^{-1}$, где $z \in \rho(A)$. Через B^* обозначаем множество линейных функционалов χ , определенных на $D(A^{\frac{1}{2}})$, и для которых при некотором $z \in \rho(A)$ (а тогда и для всех $z \in \rho(A)$) $\chi(R_z^{\frac{1}{2}}f) = (R_z^{\frac{1}{2}}f, \chi)$ есть ограниченный функционал в H . Очевидно, что $H \subset B^*$. Элемент $R_z^{\frac{1}{2}}\chi \in H$ определяется с помощью равенства: $((R_z^{\frac{1}{2}})^*f, \chi) = (f, R_z^{\frac{1}{2}}\chi)$, где $f \in H$. Интересно отметить, что если в $D(A^{\frac{1}{2}})$ и B^* ввести нормы соответственно: $\|f\|_1 = \|(A - iI)^{\frac{1}{2}}f\|$, $f \in D(A^{\frac{1}{2}})$ и $\|\chi\|_2 = \|R_i^{\frac{1}{2}}\chi\| = \|(R_i^{\frac{1}{2}})^*\chi\|$, $\chi \in B^*$, то, как легко видеть, $B = D(A^{\frac{1}{2}})$ и B^* станут полными банаховыми пространствами, причем B^* будет сопряженным к B .

Пусть V — линейный оператор, переводящий $D(A^{\frac{1}{2}})$ в B^* , и такой, что $(f, Vg) = \overline{(g, Vf)}$, где $f, g \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Мы должны придать естественный смысл возмущению A оператором V , т. е. определить сумму $A_1 = A + V$.

Рассмотрим билинейную форму, определенную на $D(A^{\frac{1}{2}})$:

$$(f, g) = (A^{\frac{1}{2}}f, (A^{\frac{1}{2}})^*g) + (f, Vg). \quad (1)$$

По определению, $D(A_1)$ совпадает с множеством тех g , $g \in D(A^{\frac{1}{2}})$, для которых форма (1) есть ограниченный функционал в H . Оператор A_1 определяется с помощью следующего равенства: $(f, g) = (f, A_1g)$, где $A_1g \in H$.

Фактически мы вместо A рассматриваем его расширение $\tilde{A}$, ко-

торое определено также на $D(A^{\frac{1}{2}})$, но со значениями из B^* : $(f, \hat{A}g) = (A^{\frac{1}{2}}f, (A^{\frac{1}{2}})^*g)$, $f, g \in D(A^{\frac{1}{2}}) = D(A^{\frac{1}{2}})^*$. После этого берем $\hat{A} + V$, но только на тех $g \in D(A^{\frac{1}{2}})$, для которых $\hat{A}g + Vg \in H$.

Легко видеть, что форма (1) симметрична, а тем самым симметричен и оператор A_1 , т. е. $(f, A_1g) = (A_1f, g)$ при $f, g \in D(H_1)$. Можно показать, что при любом $z \in \rho(A)$ справедлива формула:

$$A_1 = (A - zI)^{-1}(I + R_z^{\frac{1}{2}}VR_z^{\frac{1}{2}})(A - zI)^{\frac{1}{2}} + zI.$$

Отсюда следует, что для невещественных z

$$(A_1 - zI)^{-1} = R_z^{\frac{1}{2}}(I + R_z^{\frac{1}{2}}VR_z^{\frac{1}{2}})^{-1}R_z^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что для самосопряженности достаточно, чтобы оператор $I + R_z^{\frac{1}{2}}VR_z^{\frac{1}{2}}$ имел ограниченный обратный при некотором z и $\bar{z}$. В частности, если $R_z^{\frac{1}{2}}VR_z^{\frac{1}{2}}$ вполне непрерывный, то можно показать что при любом невещественном z существует ограниченный $(I + R_z^{\frac{1}{2}}VR_z^{\frac{1}{2}})^{-1}$. Отметим, что $g \in D(H)$ может принадлежать $D(H_1)$ в том и только в том случае, когда $Vg \in H$, т. е. Vg есть ограниченный функционал.

Следуя (1), обозначим через S_p ($1 \leq p < \infty$) банахово пространство вполне непрерывных операторов K , для которых сходится ряд $\sum_j s_j^p(K)$, где $s_j(K)$ — собственные числа положительного оператора $(K^*K)^{\frac{1}{2}}$, занумерованные в порядке убывания. S_∞ есть класс всех вполне непрерывных операторов.

В S_p нормы определяются с помощью равенств:

$$|K|_p = \left(\sum_j s_j^p(K) \right)^{\frac{1}{p}},$$

при $1 \leq p < \infty$ и $|K|_\infty = |K|$, где $|K|$ — обычная норма оператора K . Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть самосопряженный оператор A и оператор V такие, что при некотором $z_0 \in \rho(A)$

$$R_{z_0}^{\frac{1}{2}}VR_{z_0}^{\frac{1}{2}} \in S_p. \quad (3)$$

Тогда (3) имеет место при любом $z \in \rho(A)$ и

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in G_\theta}} |R_z^{\frac{1}{2}}VR_z^{\frac{1}{2}}|_p = 0, \quad \text{где } G_\theta = \left\{ z : \left| \frac{\pi}{2} - \arg z \right| < \theta \right\}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Аналогичная теорема, где вместо условия (3) выполнено условие $VR_{z_0} \in S_p$, доказана М. Г. Крейном и И. Ц. Гохбергом. Следуя

(²), операторы A и A_1 назовем резольвентно сравнимыми, если при некотором $z \in \rho(A) \cup \rho(A_1)$ $(A_1 - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1} \in S_1$. Обобщая результаты из (^{3, 4}), М. Г. Крейн (²) установил следующее предложение.

Если самосопряженные операторы резольвентно сравнимы, то существует с точностью до постоянного слагаемого единственная измеримая функция $\xi(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) такая, что

$$\text{Sp}[(A_1 - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1}] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)| d\lambda}{(\lambda - z)^2} \quad (z \in \rho(A) \cap \rho(A_1)), \quad (4)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{1 + \lambda^2} d\lambda < \infty.$$

Может быть доказана следующая

Теорема 2. Пусть A — самосопряженный оператор, V — оператор, переводящий $D(A^{\frac{1}{2}})$ в B^* и

$$R_1^{\frac{1}{2}} V R_1^{\frac{1}{2}} \in S_1. \quad (5)$$

Тогда в формуле (4) функцию $\xi(\lambda)$ можно определить с помощью формулы;

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arg \Delta(\lambda + i\varepsilon) + \text{const}, \quad (\text{почти всюду}), \quad (6)$$

где

$$\Delta(z) = \det(I + R_z^{\frac{1}{2}} V R_z^{\frac{1}{2}}).$$

Для любого $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)| d\lambda}{(1 + |\lambda|)^{1+\alpha}} < \infty. \quad (7)$$

Если A полуограничен, то можно выбрать $\xi(\lambda)$ так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{1 + |\lambda|} d\lambda < \infty. \quad (8)$$

Сделаем некоторые пояснения к доказательству теоремы. Отметим, что резольвентная сравнимость и, следовательно, справедливость формулы (5) следует из равенства:

$$(A_1 - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1} = R_z^{\frac{1}{2}} T_z R_z^{\frac{1}{2}},$$

где

$$T_z = -(I + R_z^{\frac{1}{2}} V R_z^{\frac{1}{2}})^{-1} R_z^{\frac{1}{2}} V R_z^{\frac{1}{2}} \in S_1.$$

Формула (6) получается из равенства:

$$\ln \Delta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \xi(\lambda) d\lambda + \text{const}, \quad (9)$$

где $\xi(\lambda)$ — некоторая определенная функция, удовлетворяющая (4), а голоморфная функция $\ln \Delta(z)$ ($\text{Im } z > 0$) определена так, что $\ln \Delta(z) = o(1)$ при $\text{Im } z \rightarrow \infty$. Существование такой ветви $\ln \Delta(z)$ следует из теоремы 1.

При доказательстве (9) используется следующая

Лемма. В условиях теоремы 2 существует такая последовательность конечномерных операторов V_n ($n = 1, 2, \dots$), действующих в H , что при любом $z \in \rho(A)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_z^{\frac{1}{2}} V_n R_z^{\frac{1}{2}} - R_z^{\frac{1}{2}} V R_z^{\frac{1}{2}}\|_1 = 0.$$

Для доказательства оценки (8) сначала предполагается, что $V \geq 0$, т. е. $R_{-a}^{\frac{1}{2}} V R_{-a}^{\frac{1}{2}} \geq 0$, где $a > 0$ (можно считать, что $A \geq 0$). Тогда $\frac{\text{Im } \ln \Delta(z)}{\text{Im } z} \geq 0$, $\ln \Delta(-a) \geq 0$ при любом $a > 0$ и оценка (8) следует из (9) и теоремы М. Г. Крейна (5). В случае произвольного V можно написать, что $V = V_+ - V_-$, где $V_+ \geq 0$, $V_- \geq 0$, причем $R_i^{\frac{1}{2}} V_+ + R_i^{\frac{1}{2}} \in S_1$ и $R_i^{\frac{1}{2}} V_- R_i^{\frac{1}{2}} \in S_1$, а также $(A + V_+ - iI)^{-\frac{1}{2}} V_- (A + V_+ - iI)^{-\frac{1}{2}} \in S_1$, что следует из полуограниченности A . Неравенство (7) доказывается аналогично и основано на теореме 1 и теореме И. С. Каца (6).

Оценка (8) точная, а именно: для любого $A \geq 0$ и $a \geq 0$ можно найти такой оператор V (даже одномерный), удовлетворяющий условию (5), что

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)| d\lambda}{(1 + |\lambda|)^{1-a}} = \infty.$$

Отметим, что условия теоремы 2 выполнены, если V — самосопряженный, $D(V^{\frac{1}{2}}) \supset D(A^{\frac{1}{2}})$ и $V^{\frac{1}{2}} R_i^{\frac{1}{2}} \in S_2$. Такие условия (в предположении, что A полуограничен) в других вопросах рассматривались в работе (7).

Теорема 3. Пусть A — самосопряженный оператор, $V \geq 0$ (т. е. $(R_i^{\frac{1}{2}})^* V R_i^{\frac{1}{2}} \geq 0$). Если $|R_z^{\frac{1}{2}} V R_z^{\frac{1}{2}}| < \frac{1}{2}$ при некотором $z \in \rho(A)$ и A и $A_1 = A + V$ резольвентно сравнимы, то функция $\xi(\lambda)$ в формуле (4) будет полуограниченной снизу.

Если интервал $(a, b) \in \rho(A)$, то в (a, b) A_1 может иметь самое большое счётное число точек спектра (собственные значения), которые стремятся к левому концу.

В других предположениях аналогичные утверждения содержатся в (2).

Следующая теорема в некотором смысле поясняет условие (5).

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 2, то $(A_1 - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1} \in S_1$ при любом $z > 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$.

Эту теорему в случае полуограниченного A доказал и рассказал автору М. Г. Крейн.

При доказательстве используется то, что $-R_z$ — диссипативный оператор при $\operatorname{Im} z > 0$ и применяются формулы для степеней диссипативного оператора В. И. Мацаева и Ю. А. Паланта (3). Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю М. Г. Крейну за постановку задач и постоянное внимание.

Одесский инженерно-строительный институт

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ

Ինքնահամալուծ օպերատորների մի բանի զրգոււմների մասին

Հոդվածում ուրիշ թեորեմների հետ միասին նշված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Ինքուր A ինքնահամալուծ և V զծային օպերատորներն այնպիսին են, որ $(A - zI)^{-\frac{1}{2}} V (A - zI)^{-\frac{1}{2}}$ կորիզային օպերատոր է: Ինչ դեպքում զոյուրյուն ունի հաստատուն զումարելի նշուրյումք միակ իրական $\xi(\lambda)$ ֆունկցիա, որը որոշված է սմբողջ իրական առանցքի վրա և բոլոր ոչ իրական z -երի համար բավարարում է հետևյալ առնչուրյանը՝

$$\operatorname{Sp} [(A_1 - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1}] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda \quad (1)$$

ընդ որում կամայական $z > 0$ համար

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)| d\lambda}{(1 + |\lambda|)^{1+\alpha}} < \infty$$

Երե մասնավորապես A ընտրելից կիսաառանցական է, ապա

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{1 + |\lambda|} d\lambda < \infty$$

—ելի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \arg \det (I + R_{\lambda+10}^{\frac{1}{2}} V R_{\lambda+10}^{\frac{1}{2}}),$$

որտեղ

$$R_{\lambda+10} = \lim_{y \downarrow 0} (A - (\lambda + iy))^{-1}$$

(1) հավասարուրյունը անմիջական հետեւանք է Մ. Գ. Կրեյնի թեորեմի (2):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ц. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 137, № 5, (1961). ² М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 144, № 2 (1962). ³ И. М. Лифшиц, УМН, 7, № 1 (1952). ⁴ М. Г. Крейн, Матем. сборник, 33(74), 3, (1953). ⁵ М. Г. Крейн, ДАН СССР, 76, № 1 (1951). ⁶ И. С. Кац, УМН, 11:3(69) (1956). ⁷ С. Т. Курода, Journal of the Math. Society of Japan, Vol. 12, № 3, July, 1960. ⁸ В. И. Мацаев и Ю. А. Палант, Укр. матем. журнал, том XIV, № 3, (1962).