ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян

Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой

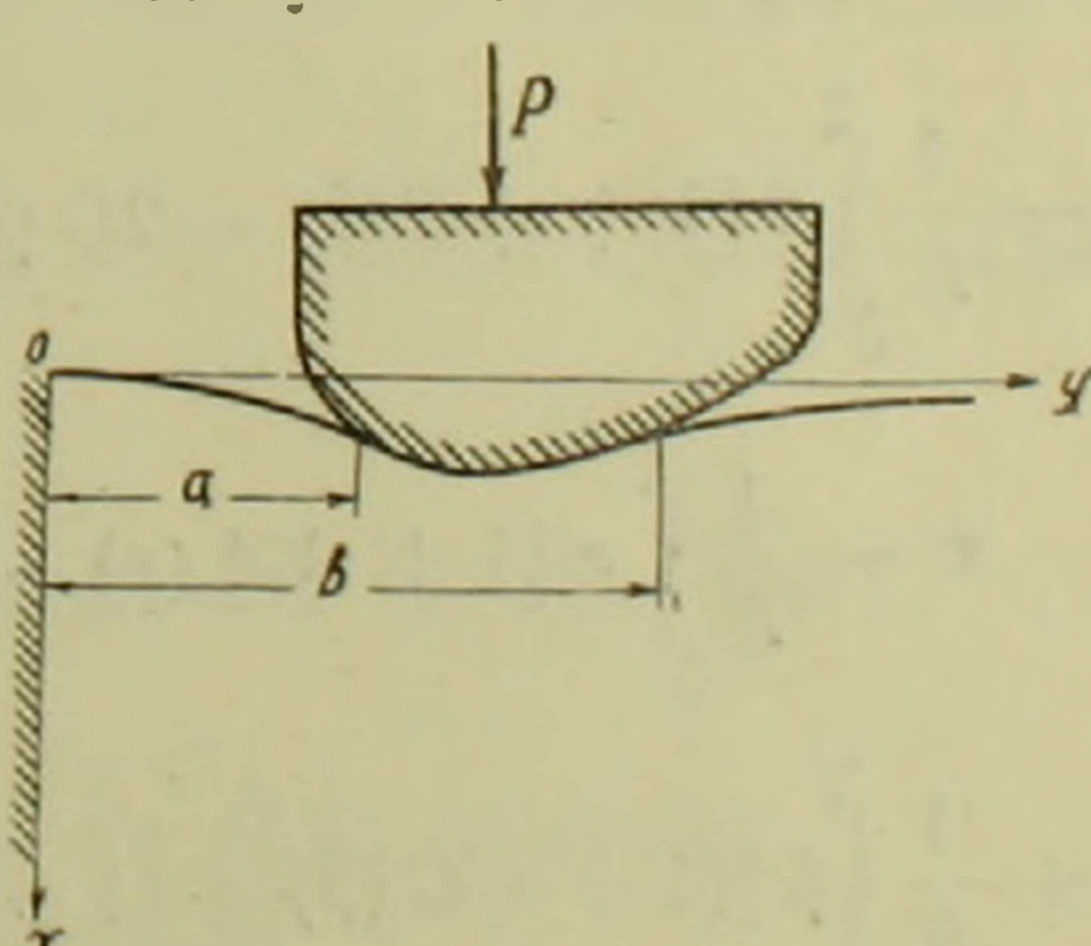
(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 12/VI 1963)

Исследованию плоской контактной задачи теории упругости посвящено много работ ([1–10] и др.). Подробный обзор о плоских контактных задачах сделан в докладе Д. И. Шермана ([12]). Решение задачи о давлении жесткого штампа, приложенного на горизонтальной границе упругой изотропной четверть-плоскости в предположении отсутствия трения, когда вертикальная граница свободна от внешних нагрузок, рассмотрено автором ([12]).

В настоящей работе рассматривается задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части горизонтальной границы упругой изотропной четверть-плоскости в предположении отсутствия трения. Вертикальная граница предполагается защемленной.

Решение задачи представлено в виде интегралов Фурье. Определение коэффициентов интегрирования сведено к решению „тройных" интегральных уравнений ([13]) и интегрального уравнения Фредгольма второго рода, причем решение „тройных" интегральных уравнений сводится к решению дуальных тригонометрических рядов ([14–15]).

§ 1. *Постановка задачи.* Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа нормальной силой P на часть прямолинейной горизонтальной границы ($x = 0$) упругой изотропной четверть-плоскости, когда вертикальная граница ($y = 0$) защемлена (фиг. 1).



Фиг. 1.

Как известно, в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$. Решение бигармонического уравнения, ограниченное при $x \to \infty$ и $y \to \infty$, может быть представлено в виде

$$\Phi(x,\ y) = \int\limits_0^\infty [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_0^\infty [C(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta. \tag{1.1}$$

Здесь $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\beta)$ и $D(\beta)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий при $x = 0$ и $y = 0$.

Используя обычные формулы, для напряжений и перемещений будем иметь

$$\sigma_x = -\int\limits_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta,$$

$$\sigma_y = \int\limits_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\theta)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int\limits_0^\infty \beta^2 [C(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta,$$

$$\tau_{xy} = -\int\limits_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta,$$

$$u = \frac{1}{E}\int\limits_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) + (1-\nu) B(\alpha) + (1+\nu)\alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha -$$

$$- \frac{1}{E}\int\limits_0^\infty \beta [1+\nu) C(\beta) - 2D(\beta) + (1+\nu)\beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta - a_0 y + b_0, \tag{1.2}$$

$$v = \frac{1}{E}\int\limits_0^\infty \alpha\, [1+\nu) A(\alpha) - 2B(\alpha) + (1+\nu)\alpha x\, B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{E}\int\limits_0^\infty \beta\, [(1+\nu) C(\beta) + (1-\nu) D(\beta) + (1+\nu)\beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta +$$

$$+ a_0 x + C_0.$$

Так как при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ перемещения $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ должны стремиться к нулю, то следует в формулах (1.2) положить

$a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Граничные условия в данном случае будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x(0,\ y) = 0 && \text{при} \quad 0 < y < a \\ &u(0,\ y) = f(y) && \text{при} \quad a < y < b \\ &\sigma_x(0,\ y) = 0 && \text{при} \quad b < y < \infty \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{xy}(0,\ y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < \infty \\ &\left.\begin{aligned} &u(x,\ 0) = 0 \\ &v(x,\ 0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Удовлетворяя условиям (1.3) и (1.4), получим

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 \qquad (0 < y < a),$$

$$\int_0^\infty \alpha [(1 + \nu) A(\alpha) + (1 - \nu) B(\alpha)] \cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta [(1 + \nu) C(\beta) - 2D(\beta) + (1 + \nu) \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y}\, d\beta = Ef(y) \quad (a < y < b), \tag{1.5}$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 \qquad (b < y < \infty),$$

$$- \int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha)] \sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y}\, d\beta = 0 \qquad (0 < y < \infty),$$

$$\int_0^\infty \alpha [(1 + \nu) A(\alpha) + (1 - \nu) B(\alpha) + (1 + \nu) \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x}\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta [(1 + \nu) C(\beta) - 2D(\beta)] \cos(\beta x)\, d\beta = 0 \quad (0 < x < \infty), \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty \beta [(1 + \nu) C(\beta) + (1 - \nu) D(\beta)] \sin(\beta x)\, d\beta = 0 \quad (0 < x < \infty).$$

Используя формулу обращения Фурье, из (1.6) получим

$$(1 + \nu) C(\beta) + (1 - \nu) D(\beta) = 0,$$

$$A(\alpha) - B(\alpha) = \frac{4}{\pi (1 + \nu) \alpha} \int_0^\infty \beta^2 \frac{\nu\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D(\beta)\, d\beta, \tag{1.7}$$

$$\beta\,[(1+\nu)\,C(\beta)-2D(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha^2\left[\frac{(1+\nu)\,A(\alpha)}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{2(\alpha^3-\nu\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]d\alpha. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.8), получим

$$\beta(\nu-3)\,D(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^2[(3+\nu)\,\alpha^2+(1-\nu)\,\beta^2]}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,A(\alpha)\,d\alpha+$$

$$+\frac{16}{\pi^2(1+\nu)}\int_0^\infty \gamma^2 D(\gamma)\left[\frac{\nu(\beta^2+\gamma^2)^2+2(\nu^2+1)\,\beta^2\gamma^2}{(\beta^2-\gamma^2)^3}\ln\frac{\gamma}{\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,\frac{(\nu+1)^2(\beta^2+\gamma^2)}{(\beta^2-\gamma^2)^2}\right]d\gamma. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.7) в (1.5), для определения $A(\alpha)$ получим три одновременных интегральных уравнения

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha=0 \qquad (0<y<a),$$

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha=F(y) \qquad (a<y<b), \quad (1.10)$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha=0 \qquad (b<y<\infty),$$

где

$$F(y)=\frac{Ef(y)}{2}+\int_0^\infty \gamma\left[\gamma y-\frac{2}{1+\nu}\right]e^{-\gamma y}D(\gamma)\,d\gamma. \quad (1.11)$$

Интегрируя (1.10) по y от 0 до y, получим

$$\int_0^\infty A^*(\alpha)\sin(\alpha y)\,d\alpha=0 \qquad (0<y<a),$$

$$\int_0^\infty \frac{A^*(\alpha)\sin(\alpha y)}{\alpha}\,d\alpha=\varphi(y) \qquad (a<y<b), \quad (1.12)$$

$$\int_0^\infty A^*(\alpha)\sin(\alpha y)\,d\alpha=0 \qquad (b<y<\infty).$$

где использованы обозначения

$$A^*(\alpha)=\alpha A(\alpha); \quad \varphi(y)=\int_0^y F(y)\,dy=\frac{E}{2}\int_0^y f(y)\,dy+$$

$$+\int_0^\infty\left(\frac{\nu-1}{\nu+1}+\frac{1-\nu}{1+\nu}e^{-\gamma y}-\gamma y e^{-\gamma y}\right)D(\gamma)\,d\gamma. \qquad (1.13)$$

Задача о распределениях напряжений $\sigma_x(0, y)$, возникающих в упругой четверть-плоскости под штампом, будет решена, если будут определены функции $A^*(\alpha)$ и $D(\beta)$ из „тройных“ интегральных уравнений (1.12) и из уравнения (1.9).

§ 2. *Определение функции* $A^*(\alpha)$. Имея в виду значения интеграла Вебера—Шафейтлина ([16])

$$\int_0^\infty J_{2n-1}(b\alpha)\sin(y\alpha)\,d\alpha=\begin{cases}\dfrac{\sin[(2n-1)\arcsin(y/b)]}{\sqrt{b^2-y^2}} & (y<b)\\[2mm] 0 & (y>b),\end{cases} \qquad (2.1)$$

$$\int_0^\infty\frac{J_{2n-1}(b\alpha)\sin(y\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\arcsin(y/b)] & (y\leqslant b)\\[2mm] \dfrac{(-1)^{n+1}\,b^{2n-1}}{(2n-1)\left(y+\sqrt{y^2-b^2}\right)^{2n-1}} & (y\geqslant b),\end{cases}$$

где $J_i(x)$ функция Бесселя i-го порядка первого рода с действительным аргументом, функцию $A^*(\alpha)$ ищем в виде

$$A^*(\alpha)=\sum_{n=1}^\infty A_n^* J_{2n-1}(b\alpha). \qquad (2.2)$$

Здесь A_n^* не известные пока коэффициенты, подлежащие определению. Тогда третье уравнение (1.12) автоматически удовлетворяется.

Обозначив

$$y=b\cos\frac{\theta}{2}, \qquad a=b\cos\frac{\lambda}{2}, \qquad (2.3)$$

меняя порядок интегрирования и суммирования и пользуясь (2.1), (2.2), приведем первые два уравнения (1.12) к виду

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^\infty\frac{A_n}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}\theta=\psi(\theta) \qquad (0<\theta<\lambda),\\ &\sum_{n=1}^\infty A_n\cos\frac{2n-1}{2}\theta=0 \qquad (\lambda<\theta<\pi),\end{aligned} \qquad (2.4)$$

где

$$A_n=(-1)^{n+1}A_n^*,$$

$$\psi(\theta)=\varphi\left(b\cos\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{Eb}{4}\int_b^{b\cos\frac{\theta}{2}} f\left(b\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta+$$

$$+\int_0^\infty \left[\frac{\nu-1}{\nu+1}+\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}-b\gamma\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{-b\gamma\cos\frac{\theta}{2}}\right]D(\gamma)\,d\gamma. \tag{2.5}$$

Такие дуальные тригонометрические ряды рассматривались в работах К. Трантера [14] и В. Ф. Шеферда [15]. Используя результаты К. Трантера, получаем

$$A_n = 2\xi(0)\sin\frac{\lambda}{2} + 4n(1-n)\sin^3\frac{\lambda}{2}\int_0^1 s\xi(s)\times$$

$$\times F\left(n+1,\ -n;\ 2;\ s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)ds, \tag{2.6}$$

где

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi}\int_0^s \frac{\mu\psi'\left\{2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu + C. \tag{2.7}$$

Здесь $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ — гипергеометрический ряд, C — постоянная. Постоянная C может быть найдена путем подстановки (2.6) и (2.7) в первое уравнение (2.4) при $\theta = \lambda$ $(y = a)$.

Таким образом, коэффициенты A_n^* определяются из уравнений (2.5), (2.6) и (2.7), а функция $A(\alpha)$ из (2.2) и (1.13) и выражается через $D(\beta)$.

§ 3. *Определение функции* $D(\beta)$. Из (1.13), (2.2) и (2.5) имеем

$$\alpha A(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} A_n J_{2n-1}(b\alpha). \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в 1(.9) и имея в виду [16], что

$$\int_0^\infty \frac{\alpha[(3+\nu)\alpha^2+(1-\nu)\beta^2]}{(\alpha^2+\beta^2)^2}J_{2n-1}(b\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{(-1)^n(b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)}\left\{(3+\nu)(2n+1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+3}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-\nu)(2n-1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n,\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2n-1}\left\{(3+\nu)\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\nu)(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right\}, \tag{3.2}$$

где ${}_pF_q(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_p;\ \beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_q;\ z)$ — обобщенный гипергеометрический ряд, получим

$$\beta(\nu-3)D(\beta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}A_n\left\{\frac{\pi}{4}\frac{(-1)^{n+1}(b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\times\right.$$

$$\times\left[(3+\nu)(2n+1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+(1+\nu)(2n-1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2};\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{5}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2n-1}\left[(3+\nu)\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(1-\nu)(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{2}\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{16}{\pi^2(1+\nu)}\int_0^{\infty}\gamma^2D(\gamma)\left[\frac{\nu(\beta^2+\gamma^2)+2\beta^2\gamma^2(\nu^2+1)}{(\beta^2-\gamma^2)^3}\ln\frac{\gamma}{\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{(\nu+1)^2(\beta^2+\gamma^2)}{(\beta^2-\gamma^2)^2}\right]d\gamma. \tag{3.3}$$

Согласно (2.5) имеем

$$\psi'(\theta)=-\frac{Eb}{4}\sin\frac{\theta}{2}f\left(b\cos\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{b\gamma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{2}{1+\nu}-b\gamma\cos\frac{\theta}{2}\right]e^{-b\cos\frac{\theta}{2}}D(\gamma)\,d\gamma. \tag{3.4}$$

Следовательно,

$$\psi'\left\{2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}=-\frac{Eb}{4}\mu\sin\frac{\lambda}{2}f\left(b\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right)+$$

$$+\frac{b\mu}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}\gamma D(\gamma)\left(\frac{2}{1+\nu}-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right)e^{-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}\,d\gamma. \tag{3.5}$$

С учетом (3.5) перепишем (2.7) в виде

$$\xi(s)=-\frac{Eb}{\pi}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^{s}\frac{\mu^2f\left(b\sqrt{1-\mu^2\sin^3\frac{\lambda}{2}}\right)}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu+\frac{2b}{\pi}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}\left[\gamma D(\gamma)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{s}\frac{\mu^2\left(\frac{2}{1+\nu}-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right)e^{-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu\right]ds+C. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.6), подставляя (2.8) в (3.3), для определения функции получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$W(\beta) = g(\beta) + \int_0^\infty K(\beta, \gamma)\, W(\gamma)\, d\gamma, \tag{3.7}$$

где введены обозначения

$$W(\beta) = \beta D(\beta), \tag{3.8}$$

$$g(\beta) = \sin\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(b1/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\left[\frac{3+\nu}{3-\nu}(2n+1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+3}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\frac{1-\nu}{3-\nu}(2n-1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\left[\frac{3+\nu}{3-\nu}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(1-\nu)(b\beta)^2}{(3-\nu)(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{C\left[1+n(1-n)\sin^2\frac{\lambda}{2}\,{}_3F_2\left(1,\ n+1,\ -n;\ 2,\ 2;\ \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{2Eb}{\pi}n(n-1)\sin^3\frac{\lambda}{2}\int_0^1\left[sF\left(n+1,\ -n;\ 2;\ s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\int_0^s\frac{\mu^2 f\left(\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right)}{\sqrt{s^2-\mu^2}}\,d\mu\right]ds\right\}, \tag{3.9}$$

$$K(\beta, \gamma) = I_1(\beta, \gamma) + I_2(\beta, \gamma), \tag{3.10}$$

где

$$I_1(\beta, \gamma) = \frac{16}{\pi^2(1+\nu)(3-\nu)}\left[\frac{\nu\gamma(\beta^2+\gamma^2)^2+2(\nu^2+1)\beta^2\gamma^3}{(\beta^2-\gamma^2)^3}\ln\frac{\gamma}{\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{(\nu+1)^2(\beta^2+\gamma^2)\gamma}{(\beta^2-\gamma^2)^2}\right], \tag{3.11}$$

$$I_2(\beta, \gamma) = \frac{16b}{\pi^2(3-\nu)}\sin^4\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(1-n)\left\{\frac{\pi}{4}\frac{(b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\times\right.$$

$$\times\left[(3+\nu)(2n+1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+3}{2},\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-\nu)(2n-1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right]+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2n-1}\left[(3+\nu)\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)+\right.$$

$$+\frac{(1-\nu)(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\Bigg\}\Bigg\}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left[sF\left(n+1,\ -n;\ 2;\ s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^s\frac{\mu^2\left(\frac{2}{1+\nu}-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right)e^{-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu\right]ds. \qquad (3.12)$$

Для решения уравнения (3.7) надо доказать, что

$$\int\limits_0^\infty|K(\beta,\ \gamma)|\,d\gamma<1. \qquad (3.13)$$

Действительно, из (3.10)

$$\int\limits_0^\infty|K(\beta,\ \gamma)|\,d\gamma\leqslant\int\limits_0^\infty I_1(\beta,\ \gamma)\,d\gamma+\int\limits_0^\infty I_2(\beta,\ \gamma)\,d\gamma. \qquad (3.14)$$

Произведя интегрирование таким же способом, как это было сделано в работе ([12]), получим

$$\int\limits_0^\infty I_1(\beta,\ \gamma)\,d\gamma=\frac{12}{\pi^2}\frac{1+\nu^2}{(1+\nu)(3-\nu)}<\frac{4}{\pi^2}\quad\text{при}\quad 0\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\int\limits_0^\infty I_2(\beta,\ \gamma)\,d\gamma\leqslant\frac{3}{2}\frac{1-\nu}{3-\nu}<\frac{1}{2}\qquad\text{при}\qquad 0\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (3.15)$$

Следовательно

$$\int\limits_0^\infty|K(\beta,\ \gamma)|\,d\gamma\leqslant\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}<1, \qquad (3.16)$$

а функция $g(\beta)$ ограничена.

Решая (3.7) методом последовательных приближений и пользуясь (3.8), получаем выражение функции $D(\beta)$, следовательно, из (1.7) также и $C(\beta)$. Подставляя полученное выражение для $D(\beta)$ в (2.6), найдем выражение для коэффициентов A_n. Подставляя далее последнее выражение в (3.1), определим $A(\alpha)$, а пользуясь соотношением (1.7), также и $B(\alpha)$. Определив $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\beta)$ и $D(\beta)$, по формулам (1.2) определим компоненты деформаций и напряжений.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

Ուղղահայաց անշարժ եզրով քառորդ հարթության համար կոնտակտային խնդիրը

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական քառորդ հարթության հորիզոնական եզրագծի վրա կոշտ շտամպի ճնշման խնդրի լուծումը, երբ ուղղահայաց եզրը անշարժ է, այն ենթադրությամբ, որ շփումը բացակայում է։ Նույն խնդիրը, երբ ուղղահայաց եզրը ազատ է արտաքին ուժերից, դիտարկվել է հեղինակի կողմից [21]։ Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով։ Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է «երեքական» ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի [13] և Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Ընդ որում «երեքական» ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվել է զույգ եռանկյունաչափական շարքերից կազմված հավասարումների լուծմանը [14–15]

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954. [2] *Н. И. Мусхелишвили*, ДАН СССР, т. VII, № 2 (1935), 51--54. [3] *Н. И. Мусхелишвили*, Сообщения АН Груз.ССР, т. 2, № 10 (1941). [4] *И. Я. Штаерман*, Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949. [5] *Л. А. Галин*, Контактные задачи теории упругости, ГИТТЛ, М., 1953. [6] *Л. А. Галин*, ДАН СССР, т. 39, № 3 (1943) 88—93. [7] *Д. И. Шерман*, Плоская задача теории упругости со смешанными условиями, Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 88, 1938. [8] *Н. М. Бородачев*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1962, 170—172. [9] *Г. Я Попов*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 14, № 3 (1961), 81—96. [10] *Г. Я. Попов*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 19, № 2 (1963), 15—32. [11] *Д. И. Шерман*, Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости, Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Изд. АН СССР, М.-Л., 1962, 405—468. [12] *В. С. Тоноян*, ДАН АрмССР, т. 37, № 3 (1963). [13] *К. Дж. Трантер*, The opening of a pair of coplanar Griffith crac under internal pressure. Quart. J. Mech. and App. Math., vol. 14. part 3, 1961, 283—292. [14] *К. Дж. Трантер*, Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc. vol. 4. part 2, 1959, 49—57. [15] *В. М. Шеферд*, On trigonometrical series with mixed conditions. Proc. London Math. Soc. (2), vol. 43, 1937, 366—375. [16] *И. С. Градштейн* и *И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.