ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 5

МАТЕМАТИКА

Э. М. Кегеян

О радиальном поведении аналитических функций в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 30/V 1963)

Пусть D—единичный круг в комплексной плоскости z, S—единичная окружность и E—некоторое замкнутое множество точек на S.

Обозначим через B класс аналитических в D функций, ограниченных по модулю единицей.

По известной теореме единственности ограниченных аналитических функций, если $f(z) \not\equiv 0$ в круге D, то из соотношения

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = 0 \quad \text{при} \quad \theta \in E,$$

следует, что $\operatorname{mes} E = 0$ (1).

Если $\operatorname{mes} E = 0$, то всегда можно построить ограниченную аналитическую в D функцию, равномерно стремящуюся к нулю на радиусах θ при $\theta \in E$ и $r \to 1$ (2).

Обозначим

$$\mu(R) = \sup_{\substack{\theta\in E \\ 0<r<R<1}} |f(re^{i\theta})|.$$

В настоящей заметке исследуется допускаемая скорость стремления к нулю функции $\mu(R)$ при $R \to 1$ для функции класса B, отличной от тождественного нуля.

Этот вопрос хорошо исследован для множества E, состоящего из одной точки. Законченные результаты в этом направлении получены А. Л. Шагиняном (3).

Пусть $\mu(r)$ $(\mu(0) \leqslant 1)$—действительная положительная функция, определенная в промежутке (0, 1), которая, строго убывая, стремится к нулю при $r \to 1$. Пусть, далее, E—замкнутое множество точек на окружности S с нулевой линейной мерой и $C_S E$—дополнение к E относительно окружности S. $C_S E$—открытое множество, состоящее из конечного или бесконечного числа интервалов

$$C_S E = \sum_{(k)} (a_k, b_k). \tag{1}$$

При этом, если $\delta_k = b_k - a_k$, то будем предполагать, что

$$\delta_{k+1} \leqslant \delta_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

Обозначим через $B(\mu, E)$ совокупность функций $f(z) \not\equiv 0$ из класса B, удовлетворяющих условию

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \mu(r) \tag{3}$$

при $\theta \in E$ и $0 < r < 1$.

Определим номер $N(r)$ из условий

$$\delta_k > \frac{1-r}{2} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \cdots, N(r), \tag{4}$$

$$\delta_k \leqslant \frac{1-r}{2} \quad \text{при} \quad k \geqslant N(r) + 1.$$

Далее, определим последовательность положительных чисел $\{\gamma_k\}$ следующим образом:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{1-r}{4} & \text{при} \quad k \leqslant N(r) \\ \dfrac{\delta_k}{2} & \text{при} \quad k > N(r) \end{cases} \tag{5}$$

Для функции из класса $B(\mu, E)$ можно утверждать следующее:

Теорема 1. *Для каждой функции из класса $B(\mu, E)$ имеет место следующее неравенство:*

$$\ln|f(0)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{(k)} \gamma_k \ln\left[\mu(r) + \frac{4\gamma_k [\mu(2r-1)]^{\alpha}}{1-r}\right].$$

Доказательство. Пусть $e^{i\varphi_0} \in E$ и $z_0 = re^{i\varphi_0}$, где $0 < r < 1$. Если $|z - z_0| \leqslant \frac{1-r}{4}$, то

$$|f(z) - f(z_0| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = \frac{1-r}{2}} |f(\zeta)| \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} |d\zeta|. \tag{7}$$

Для оценки $|f(\zeta)|$ на окружности $|\zeta - z_0| = \frac{1-r}{2}$ предположим, что $\arg\zeta \leqslant \varphi_0$, и рассмотрим полукруг $\gamma(r, z_0)$: $\{|z - z_0| < 1 - r; \arg z \leqslant \varphi_0\}$. Граница $\gamma(r, z_0)$ состоит из полуокружности J_1: $\{|z - z_0| = 1 - r; \arg z \leqslant \varphi_0\}$ и из отрезка J_2: $\{z = |z| e^{i\varphi_0}, 2r - 1 \leqslant |z| \leqslant 1\}$.

Так как $f(z) \in B(\mu, E)$, то из (3)

$$|f(z)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{на} \quad J_1 \\ \mu(2r-1) & \text{на} \quad J_2, \end{cases}$$

так что по теореме о двух константах (4) получим, что

$$|f(\zeta)| < [\mu(2r-1)]^{\omega(\zeta, J_2, \gamma(r, z_0))} \tag{8}$$

при $|\zeta - z_0| = \frac{1-r}{2}$, где $\omega(\zeta, J_2, \gamma(r, z_0)$ — гармоническая мера отрезка J_2 в точке ζ относительно полукруга $\gamma(r, z_0)$.

Для таких ζ

$$\omega(\zeta, J_2, \gamma(r, z_0)) \geqslant \frac{2}{\pi}[2\operatorname{arctg} 2 - 1], \tag{9}$$

так что из (8) и (9) получается следующая оценка на окружности $|\zeta - z_0| = \frac{1-r}{2}$:

$$|f(\zeta)| < [\mu(2r-1)]^{\alpha}, \tag{10}$$

где $0 < \alpha < 1$ — абсолютная константа.

Из (7), (3) и (10) при $|z - z_0| < \frac{1-r}{2}$ и $|z| = r$ получим

$$|f(z)| < \mu(r) + |z - z_0[\mu(2r-1)]^{\alpha} \cdot \frac{4}{1-r} <$$

$$< \mu(r) + |\varphi - z_0| \frac{4[\mu(2r-1)]^{\alpha}}{1-r}, \tag{11}$$

где $\varphi = \arg z$.

Но так как $\ln|f(z|$ — субгармоническая функция в D, то для каждого r $(0 < r < 1)$, учитывая (1), (11) и (4), получим

$$\ln|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{(k)}\int_{a_k}^{b_k} \ln|f(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{(k)}\left\{\int_{a_k}^{a_k+\gamma_k} \ln\left[\mu(r) + (\varphi - a_k)\frac{4[\mu(2r-1)]^{\alpha}}{1-r}\right]d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_{b_k-\gamma_k}^{b_k} \ln\left[\mu(r) + (b_k - \varphi)\frac{4[\mu(2r-1)]^{\alpha}}{1-r}\right]d\varphi = \right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{(k)}\gamma_k \ln\left[\mu(r) + 4\frac{\gamma_k[\mu(2r-1)]^{\alpha}}{1-r}\right] +$$

$$+ \frac{(1-r)\mu(r)}{4\pi[\mu(2r-1)]^{\alpha}}\sum_{(k)}\ln\left[1 + \frac{4\gamma_k[\mu(2r-1)]^{\alpha}}{\mu(r)(1-r)}\right] - \frac{1}{\pi}\sum_{(k)}\gamma_k.$$

Отсюда и получается доказываемое неравенство, если учесть, что $\ln(1+x) < x$ при $x > 0$.

Теорема 2. *Если*

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, N(r)(1-r)\ln\mu(2r-1)=-\infty, \tag{12}$$

то класс $B(\mu, E)$ *пуст.*

Действительно, пусть наоборот, $f(z)\in B(\mu, E)$ и m — порядок нуля этой функции в точке $z=0$. Тогда функция

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z^m}$$

будет принадлежать классу $B(\mu_1, E)$, где функция $\mu_1(r)$ определяется следующим образом:

$$\mu_1(r)=\begin{cases}1 & 0\leqslant r\leqslant r_1\\ \dfrac{\mu(r)}{r^m} & r_1<r<1.\end{cases} \tag{13}$$

Здесь r_1-корень уравнения $\mu(r)=r^m$. Кроме того, $\varphi(0)\neq 0$.

Учитывая (4) и (5), из теоремы 1 получаем

$$\ln|\varphi(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}N(r)(1-r)\ln\{\mu_1(r)+2[\mu_1(2r-1)]^\alpha\}=$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}N(r)(1-r)\ln\mu(2r-1)+\frac{1}{2\pi}N(r)(1-r)\ln 2-$$

$$-\frac{\alpha\cdot m}{2\pi}N(r)(1-r)\ln r+\frac{1}{2\pi}N(r)(1-r)\ln\left\{1+\frac{\mu(r)}{2r^{m(1-\alpha)}[\mu(2r-1)]^\alpha}\right\}.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2, так как из (4)

$$N(r)(1-r)\leqslant\sum_{(k)}2\delta_k=4\pi$$

и из (13)

$$\ln\left\{1+\frac{\mu(r)}{2r^{m(1-\alpha)}[\mu(2r-1)]^\alpha}\right\}\leqslant\frac{1}{2}$$

при $r_1<r<1$.

Из результатов статьи ([3]), в частности, следует, что ни одна аналитическая и ограниченная в D функция, кроме тождественного нуля, не может стремиться к нулю на радиусах круга D при $r\to 1$ со скоростью

$$\exp\left\{-\frac{P(r)}{1-r}\right\}$$

при условии

$$\lim_{r\to 1}P(r)=+\infty.$$

Этот результат можно получить и из (12). Если взять вместо E одноточечное множество, тогда $N(r)=1$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, N(r)(1-r)\ln\mu(2r-1)=\overline{\lim_{r\to 1}}\,(1-r)\frac{-P(2r-1)}{2(1-r)}=-\infty$$

и по теореме 2 эта функция не принадлежит к $B(\mu, E)$, значит, она тождественно равна нулю.

Из (12) можно получить и следующий результат:

Теорема 3. *Пусть*

$$\mu(r) = \exp\left\{-\frac{1}{1-r}\right\}.$$

Для того чтобы $B(\mu, E)$ не был пустым, необходимо и достаточно, чтобы множество E было конечным множеством.

Действительно, если E состоит из точек $e^{i\alpha_n}$ $\{k=1, \cdots, m\}$, то не трудно видеть, что функция

$$f(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{ze^{-i\alpha_k} - 1}\right\}$$

принадлежит классу $B(\mu, E)$, чем и достаточность условия теоремы доказана.

Для доказательства необходимости предположим, что E — бесконечное множество. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{r\to 1} N(r) = +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{r\to 1} N(r)(1-r)\ln e^{-\frac{1}{2(1-r)}} = -\infty$$

и по теореме 2 класс $B(\mu, E)$ пуст.

Интересно установить и следующее:

Теорема 4. *Как бы медленно функция $\mu(r)$ не стремилась к нулю при $r \to 1$, можно построить на S такое замкнутое множество E меры нуль, чтобы класс $B(\mu, E)$ был пуст.*

Для доказательства этой теоремы установим следующую лемму.

Лемма. *Для каждой положительной функции $\varphi(r)$, которая, монотонно возрастая, стремится к $+\infty$ при $r \to 1-0$, можно построить последовательность невозрастающих положительных чисел $\{\delta_k\}$ такую, что*

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k < 1$,

2) $\overline{\lim\limits_{r\to 1-0}} (1-r) N(r) \varphi(r) > 0$,

где $N(r)$ определяется из (4) с помощью последовательности $\{\delta_k\}$.

Доказательство. Пусть $n_0 = 0$. Возьмем номер n_1 настолько большим, чтобы

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2n_1}\right) > 2,$$

и пусть

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{n_1} = \frac{1}{2n_1}$$

Если номер n_k уже выбран, то возьмем $n_{k+1} > n_k$ настолько большим, чтобы

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2^{k+1} n_{k+1}}\right) > 2^{k+1},$$

и пусть

$$\delta_{n_k+1} = \delta_{n_k+2} = \cdots = \delta_{n_{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Последовательность невозрастающих чисел $\{\delta_k\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \delta_i \right) < \sum_{k=0}^{\infty} n_{k+1} \frac{1}{2^{k+1} n_{k+1}} = 1.$$

2) при $r_k = 1 - \frac{1}{n_k 2^{k+1}}$ имеем

$$N(r_k)(1 - r_k)\varphi(r_k) > n_k \cdot \frac{1}{n_k 2^{k+1}} \cdot 2^k = \frac{1}{2},$$

так что

$$\overline{\lim_{r \to 1}} N(r)(1 - r)\varphi(r) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Переходя к доказательству теоремы, возьмем функцию $\varphi(r) = [-\ln \mu(2r - 1)]^{1/2}$ в условии леммы и построим последовательность чисел $\{\delta_n \downarrow 0\}$, для которой

$$\overline{\lim_{r \to 1}} N(r)(1 - r) \sqrt{\ln \frac{1}{\mu(1r - 1)}} > 0.$$

Но тогда

$$\overline{\lim_{r \to 1}} N(r)(1 - r) \ln \mu(2r - 1) = -\infty. \tag{14}$$

Рассмотрим промежуток $J: 0 \leqslant \varphi \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \left(\text{по лемме } \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 1 \right)$ и систему интегралов $\{(a_k, b_k)\}$, где

1) $b_k - a_k = \delta_k$

2) $(a_k, b_k) \subset J \quad k = 1, 2, \ldots$

3) $(a_i, b_i)(a_j, b_j) = 0$, если $i \neq j$

и пусть

$$E = J - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Из (14) и из теоремы 2 следует наше утверждение относительно множества E.

Ереванский государственный университет

Է. Մ. ՔԵՀԵՅԱՆ

Շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների ճառավղային վարքի մասին

Դիցուք D-ն $|z| < 1$ շրջանն է, իսկ S-ը $|z| = 1$ շրջանագիծը կոմպլեքս հարթության վրա։

Թող $\mu(r)$-ը ($\mu(0) < 1$) լինի մոնոտոն նվազող դրական ֆունկցիա, որը ձգտում է զրոյի երբ $r \to 1$, իսկ E-ն՝ զրո չափի փակ բազմություն S-ի վրա։

Նշանակենք $B(\mu, E)$-ով միավոր շրջանում միարժեք անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիաների դասը, որոնք բավարարում են

$$|f(re^{i\varphi})| < \mu(r)$$

անհավասարությանը երբ $e^{i\varphi} \in E$։

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է $\mu(r)$ ֆունկցիայի զրոյի ձգտելու թույլատրելի արագությունը, որի դեպքում $B(\mu, E)$ դասը դատարկ չէ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *F.* и *M. Riesz*, Uber die Randwerte einer Analytischen Function. 4 Cong. Scand. Math., 1916 (опублик в 1918). [2] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат. М.—Л., 1950. [3] *А. Л. Шагинян*, Известия АН АрмССР, т. XII, № 1 (1959). [4] *Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, М. - Л., Гостехиздат, 1940.