

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

Н. А. Петросян

Влияние вертикальных нисходящих токов на процесс трансформации поля ветра

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/V 1963)

§ 1. *Постановка задачи.* В существующих немногочисленных теоретических работах рассматриваются вертикальные токи того или другого происхождения, их влияние на процессы влагооборота, на образования облаков и осадков (¹⁻⁵).

В данной работе задача ставится в следующем виде.

Воздушный поток переходит с одной подстилающей поверхности I (например суши) на другую II (например водную). При этом по причине температурной неоднородности или по другим термо-гидродинамическим причинам начинается процесс трансформации горизонтальной составляющей скорости U . Вследствие этого и в силу сохранения массы (математически выражающемся связью U и W уравнением неразрывности), возникают вертикальные скорости W .

Здесь рассматривается влияние возникших вертикальных скоростей на процесс трансформации горизонтальной составляющей скорости.

Уравнения задачи записываются в виде (⁶)

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

где x и z — соответственно горизонтальная (по направлению U) и вертикальная координаты.

Граничными условиями задачи являются.

На стыке двух подстилающих поверхностей задается вертикальное распределение скорости

$$U(x, z)|_{z=0} = U_0(z). \quad (1.2)$$

На подстилающей поверхности задается поток количества движения

$$k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = v_*^2,$$

или в силу того, что поток количества движения медленно меняется с высотой, последнее условие можно ставить при $z = \varepsilon$

$$k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=\varepsilon} = v_*^2, \quad (1.3)$$

где v_* — динамическая скорость для II поверхности.

На достаточно большой высоте скорость ограничена

$$U|_{z \rightarrow \infty} < \infty. \quad (1.4)$$

Вертикальная составляющая скорости W на высоте $z = \varepsilon$ обращается в нуль

$$W|_{z=\varepsilon} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь: ε — некоторая малая высота, на которой $W = 0$, а $U \neq 0$. Другими словами и U и W стремятся к нулю при подходе к подстилающей поверхности, но таким образом, что W превращается в нуль быстрее, чем U .

Переходя к решению задачи, отметим, что поставленная нелинейная задача решается численно. При этом с целью обеспечения более высокой точности при замене производных функции $U(x, z)$ конечными разностями, разрабатывается особый сеточный метод, учитывающий выражение скорости $U(x, z)$.

§ 2. *Специальный сеточный метод, учитывающий выражение горизонтальной составляющей скорости.* Вертикальный профиль скорости ветра имеет такой вид, что в узкой полосе у поверхности скорость ветра очень быстро растет от нуля до конечной величины. Математически это выражается в том, что если брать производную по вертикали z , имея в виду выражение

$$U(x, z) = C_1(x) z^m + C_2(x), \quad (2.1)$$

получим

$$\frac{\partial U}{\partial z} = C_1(x) z^{m-1} m, \quad (2.2)$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — некоторые функции, а $m < 1$.

Следовательно, функция $\partial U / \partial z$ у поверхности, т. е. при $z \rightarrow 0$ имеет особенность. Исходя из этого, чтобы обеспечить определенную точность расчетов, при численном решении приходится брать очень мелкий шаг по z .

Для вертикальной составляющей скорости W , которая на основе второго уравнения системы (1.1) при принятом виде U по формуле (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial x} = - [C_1'(x) z^m + C_2'(x)], \quad (2.3)$$

Этого не требуется, так как она при $z=0$, или z близко к нулю, не имеет особенностей.

Ниже приводится разработка некоторой новой схемы представления первой и второй производных функции $U(x, z)$ по z в конечных разностях, которая позволяет не ограничивать шаг по вертикали для обеспечения нужной точности. Подобная схема может быть составлена для уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial z} k(x, z) \frac{\partial U}{\partial z} = U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

при граничном условии

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi(x),$$

где $k(x, z)$ представлено в виде

$$k(x, z) = z^n \cdot \varphi(x, z).$$

Здесь функция φ достаточно гладкая.

Напишем систему уравнений (1.1) в конечно-разностном виде. Для этого сделаем замену переменной, обозначая

$$\zeta = z^m. \quad (2.4)$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Учитывая обозначение (2.4) и что $\partial U / \partial \zeta|_{\zeta_j}$ можно представить в виде

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right|_{\zeta_j} = \frac{U(x_i, \zeta_{j+1}) - U(x_i, \zeta_j)}{\zeta_{j+1} - \zeta_j},$$

при этом, переходя к переменной z , для $\partial u / \partial z|_{z_j}$ будем иметь

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z_j} = \frac{m z_j^{m-1}}{z_{j+1}^m - z_j^m} [U(x_i, z_{j+1}) - U(x_i, z_j)]. \quad (2.5)$$

Чтобы заменить правую часть первого уравнения системы (1.1) конечными разностями, используем также зависимость (2.4).

Если при этом учесть выражение для $k(z) = k_1 z^{1-m}$, то после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z_j} = k_1 m^2 z_j^{m-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta_j}. \quad (2.6)$$

Теперь представляя $\partial^2 U / \partial \zeta^2$ в точке ζ_j через значения функций U в точках (x_i, ζ_{j-1}) , (x_i, ζ_j) и (x_i, ζ_{j+1}) будем иметь

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right|_{\zeta_j} = aU(x_i, \zeta_{j-1}) + bU(x_i, \zeta_j) + cU(x_i, \zeta_{j+1}). \quad (2.7)$$

Для определения входящих сюда коэффициентов a , b и c напишем разложения в ряд функций правой части в точке (x_i, ζ_j) . Тогда,

приравнивая в полученном таким путем выражении коэффициенты при соответствующих членах, получим систему уравнений, решением которой является

$$a = \frac{2}{(\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1})(\zeta_j - \zeta_{j-1})}, \quad b = \frac{-2}{(\zeta_j - \zeta_{j-1})(\zeta_{j+1} - \zeta_j)},$$

$$c = \frac{2}{(\zeta_{j+1} - \zeta_j)(\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1})}. \quad (2.8)$$

С учетом (2.7) и (2.8) и в силу обозначения (2.4), (2.6) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z_j} = \frac{2k_1 m^2}{z_j^{1-m}} \left[\frac{U(x_i, z_{j-1})}{(z_{j+1}^m - z_{j-1}^m)(z_j^m - z_{j-1}^m)} - \frac{U(x_i, z_j)}{(z_j^m - z_{j-1}^m)(z_{j+1}^m - z_j^m)} + \frac{U(x_i, z_{j+1})}{(z_{j+1}^m - z_j^m)(z_{j+1}^m - z_{j-1}^m)} \right]. \quad (2.9)$$

Если представить еще $\partial U / \partial x$ и $\partial W / \partial z$ в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{U(x_i, z_j) - U(x_{i-1}, z_j)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z_j} = \frac{W(x_i, z_{j+1}) - W(x_i, z_j)}{\Delta z}, \quad (2.10)$$

то с учетом (2.5), (2.9) и (2.10) вместо системы уравнений (1.1) получим следующие конечно-разностные уравнения

$$U(x_{i-1}, z_j) \frac{U(x_i, z_j) - U(x_{i-1}, z_j)}{\Delta x} + W(x_{i-1}, z_j) [U(x_i, z_{j+1}) - U(x_i, z_j)] \frac{m z_j^{m-1}}{z_{j+1}^m - z_j^m} =$$

$$= \frac{2k_1 m^2}{z_j^{1-m}} \left[\frac{U(x_i, z_{j-1})}{(z_{j+1}^m - z_{j-1}^m)(z_j^m - z_{j-1}^m)} - \frac{U(x_i, z_j)}{(z_j^m - z_{j-1}^m)(z_{j+1}^m - z_j^m)} + \frac{U(x_i, z_{j+1})}{(z_{j+1}^m - z_j^m)(z_{j+1}^m - z_{j-1}^m)} \right], \quad (2.11)$$

$$\frac{U(x_i, z_j) - U(x_{i-1}, z_j)}{\Delta x} = \frac{W(x_i, z_{j+1}) - W(x_i, z_j)}{\Delta z}.$$

Нетрудно показать, что граничные условия (1.2), (1.3) и (1.5) при этом примут вид

$$U(x_0, z_i) = U_0(z_i),$$

$$U(x_i, \varepsilon) = U(x_i, z_i) - \frac{v_*^2}{k_1 m} (z_i^m - z_0^m), \quad (2.12)$$

$$W(x_i, \varepsilon) = 0.$$

Вместо граничного условия (1.4) при расчетах принимается заданным значение скорости U на достаточно большой высоте H .

Запишем полученную систему уравнений (2.11) и граничные условия (2.12) в несколько ином виде, удобном для определения функций $U(x_i, z_j)$ и $W(x_i, z_j)$. Тогда для определения первой в фиксированном i -ом слое будем иметь

$$\begin{aligned} U_i^0 - U_i^1 &= -d_0, \\ a_i^j U_i^{j+1} - b_i^j U_i^j - c_i^j U_i^{j-1} &= -d_i^j, \\ U_i^0 &= U_0^0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а для второй

$$\begin{aligned} W_i^0 &= 0, \\ W_i^j - W_i^{j+1} &= \frac{\Delta z}{\Delta x} [U_i^j - U_0^j]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь ради простоты аргументы x_i и z_j заменены обозначениями снизу и сверху соответственно. Коэффициенты a_i^j , b_i^j , c_i^j , d_i^j выражаются формулами

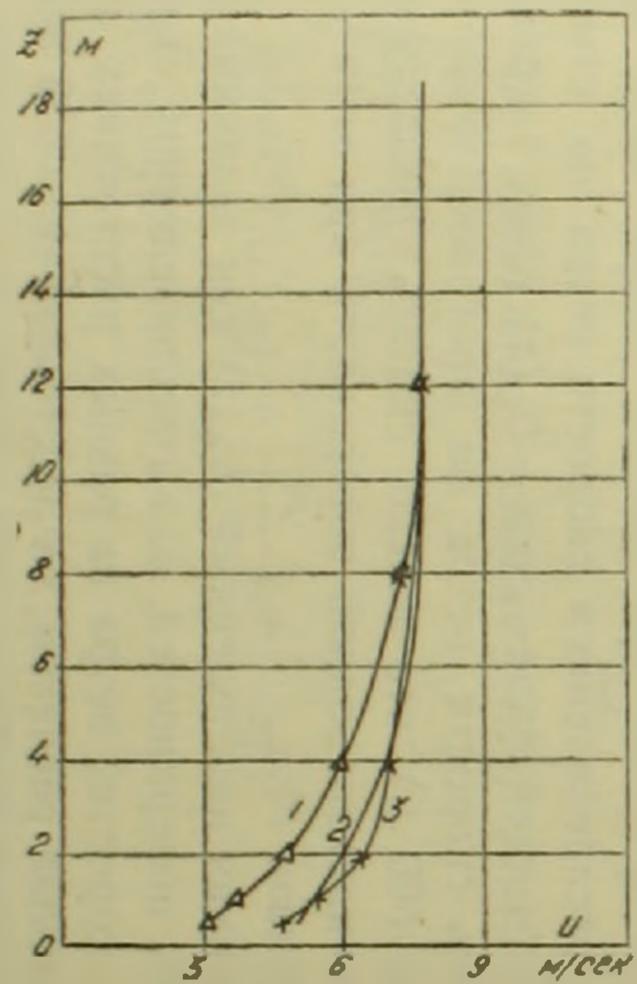
$$\begin{aligned} a_i^j &= \frac{m\Delta x}{(z_{j+1}^m - z_j^m) z_j^{1-m}} \left[\frac{2k_1 m}{z_{j+1}^m - z_{j-1}^m} - W_{i-1}^j \right], & d_0 &= \frac{v_*^2}{k_1 m} (z_1^m - z^m), \\ b_i^j &= U_0^j - \frac{m\Delta x}{(z_{j+1}^m - z_j^m) z_j^{1-m}} \left[W_{i-1}^j - \frac{2k_1 m}{z_j^m - z_{j-1}^m} \right], & & \\ c_i^j &= \frac{2k_1 m^2 \Delta x}{(z_{j+1}^m - z_{j-1}^m) (z_j^m - z_{j-1}^m) z_j^{1-m}}, & d_i^j &= (U_i^j)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

и удовлетворяют условиям устойчивости (7).

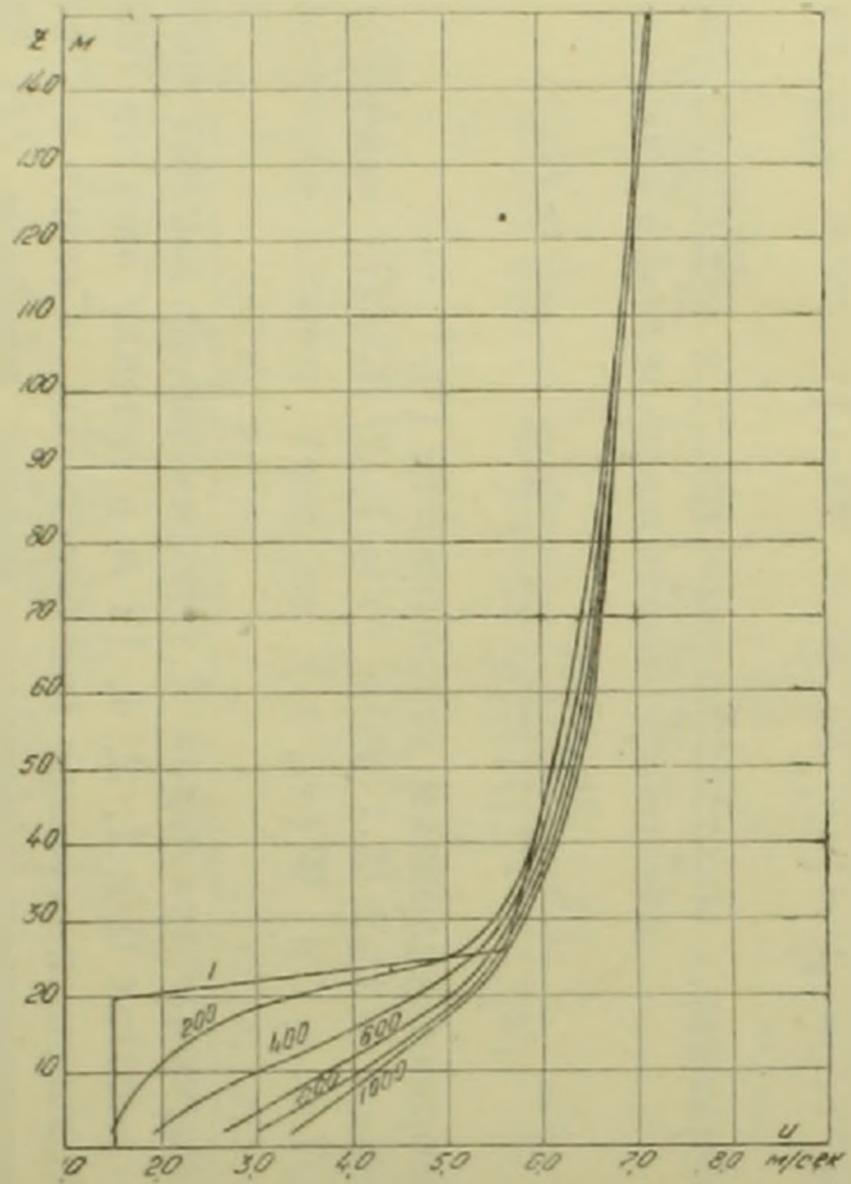
Полагая $i = 1, 2, 3 \dots J$ и $j = 1, 2, 3 \dots G$, получим значения функций $U(x_i, z_j)$ и $W(x_i, z_j)$ во всех точках интересующей нас области.

§ 3. *Расчеты примеров.* 1. На основании данных наблюдений за ветром на высотах 0,5; 1, 2, 4, 12 м в течение августа 1962 г. на маленьком Арданишском озере (на берегу оз. Севан) в Отделе гидрологии и метеорологии Института водных проблем АН АрмССР был получен средний вертикальный профиль скорости ветра на берегу озера. Этот профиль при данном направлении ветра можно считать заданным распределением скорости ветра на стыке двух подстилающих поверхностей суша — вода — $U_0(z)$ (фиг. 1 кривая 1). Получен также профиль скорости ветра на противоположном берегу озера (на расстоянии 500 м), что можно считать трансформирующимся профилем под влиянием водной поверхности при этом же направлении ветра (фиг. 1 кривая 3).

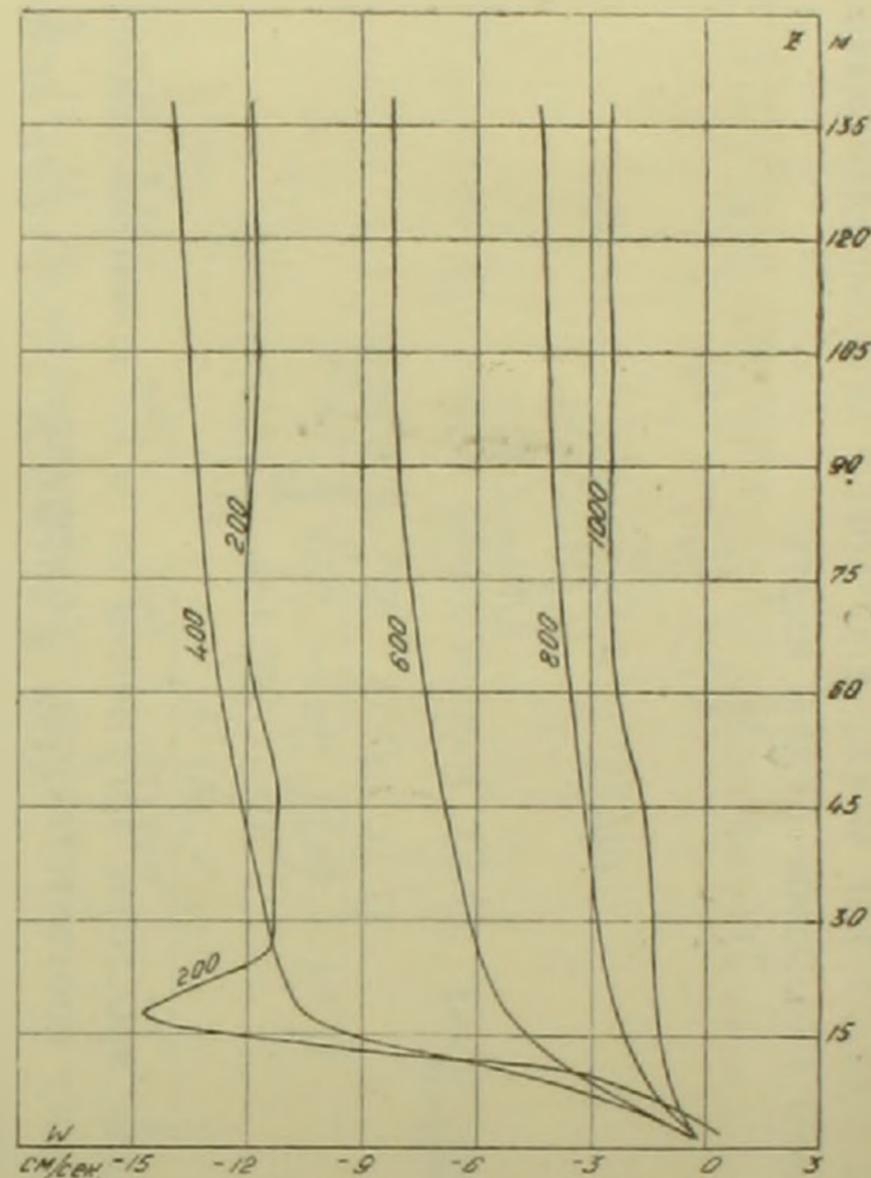
Принимая наблюденный $U_0(z)$ как заданный на стыке двух подстилающих поверхностей, по вышеприведенной схеме были рассчитаны профили скоростей ветра на разных расстояниях от берега. Профиль U , полученный расчетом, на расстоянии $x = 500$ м от берега приведен на фиг. 1 (кривая 2).



Фиг. 1. Вертикальные профили скорости ветра. Пример I. 1—при $x=0$, 2—рассчитанный и 3—наблюденный при $x=500$ м.



Фиг. 2. Распределение горизонтальной составляющей скорости по высоте на разных расстояниях от берега. Пример II. 1—при $x=0$.



Фиг. 3. Распределение вертикальной составляющей скорости по высоте на разных расстояниях от берега. Пример II.

Кривые 2 и 3 показывают, что совпадение наблюдаемого и рассчитанного профилей достаточно хорошее.

Вертикальные нисходящие скорости здесь получились по абсолютной величине небольшими (до 1,93 см/сек.). Ошибка в величине горизонтальной скорости из-за неучета таких скоростей составляет 5% максимум.

II. Во втором примере в качестве заданного профиля $U_0(z)$ взято распределение скорости в виде „стенки“, т. е. скорость до высоты 20 м принята постоянной, а выше растет (кривая 1 на фиг. 2).

Здесь, так же как в первом примере, при переходе воздушного потока с одной поверхности на другую увеличивается U и образуются вертикальные нисходящие токи, которые начинают расти с нулевого значения, получают свое максимальное значение на расстоянии 200–300 м от берега, а дальше убывают по расстоянию.

По абсолютной величине нисходящие токи в этом случае получились большими (до 14,67 см/сек.). Из-за неучета этих скоростей в величине горизонтальной скорости на некоторых высотах можно допустить ошибку до 48%.

Полученные здесь расчетным путем распределения U и W по высоте на разных расстояниях от берега приведены на фиг. 2 и 3.

В обоих случаях учет возникших вертикальных нисходящих токов убыстряет трансформацию горизонтальной скорости. Другими словами на данном расстоянии горизонтальная скорость U без учета вертикальных нисходящих токов всегда меньше ее значения, полученного с учетом W . Следовательно наличие нисходящих токов увеличивает U .

Институт водных проблем
Академии наук Армянской ССР

Ն. Զ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ուղղաձիգ վարընթաց արագությունների ազդեցությունը բամու դառի առանաֆորմացիայի պրոցեսի վրա

Հոդվածում բերվում է ծածկույթի մակերևույթի ազդեցության տակ բամու դառի տրանսֆորմացիայի ոչ դժային հավասարման թվային լուծումը երկու մակերևույթների բաժանման սահմանում բամու արագության տրված կամայական $U_0(z)$ բաշխման դեպքում:

Աշխատությունում մշակվում է հատուկ ցանցային մեթոդ, որը հաշվի է առնում արագության հորիզոնական բաղադրիչի (2.1) անալիտիկ տեսքը:

Սահմանային (1.2)–(1.4) պայմանների դեպքում հավասարումների (1.1) սխտեմի թվային լուծման հիման վրա որոշվում է այն սխալը, որն առաջանում է արագության հորիզոնական բաղադրիչի մեծության մեջ, երբ վերջինիս տրանսֆորմացիայի պատճառով առաջացած ուղղաձիգ բաղադրիչի ազդեցությունը հաշվի չի առնվում:

Պարզվում է, որ որոշ տեսքի սկզբնական $U_0(z)$ բաշխումների դեպքում կարող են առաջանալ բացարձակ արժեքով բավական մեծ վարընթաց արագություններ (մինչև 15 սմ/վրկ), որոնց հաշվի չառնելուց առաջացած սխալը հորիզոնական արագության մեծության մեջ կարող է կազմել մինչև 48%:

Հաշվումները ցույց են տալիս, որ մշակված սխեմայով ստացված քամու արագության
բաշխումը բավարար ճշտությամբ համընկնում է նրա բնության մեջ դիտված բաշխման հետ:
Աշխատությունում մշակված նոր ցանցային մեթոդը որոշակի փոփոխություններից հետո
կարող է կիրառվել մետեորոլոգիայի մի շարք այլ խնդիրների թվային լուծումները ստանալիս:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Л. Р. Арраго. О вертикальных токах в атмосфере над термически неоднородной поверхностью, Тр. ГГО, вып. 99, 1959. ² Л. Р. Арраго, Влияние вертикальных токов на влагообмен, Тр. ГГО вып. 71 (133), 1957. ³ Л. С. Гандин, Об особенностях испарения вблизи береговой линии, Тр. ГГО, вып. 55 (117), 1955. ⁴ М. Е. Швец, К вопросу о влагообороте в атмосфере, Тр. ГГО, вып. 33 (95), 1952. ⁵ М. Е. Швец, и Р. Л. Каган, К вопросу о предвычислении вертикальной скорости в атмосфере, Тр. ГГО, вып. 99, 1959. ⁶ Н. А. Петросян, Известия АН АрмССР (серия физ.-математич. наук), т. XVI, 3 (1963). ⁷ Г. И. Марчук, Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.