ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 4

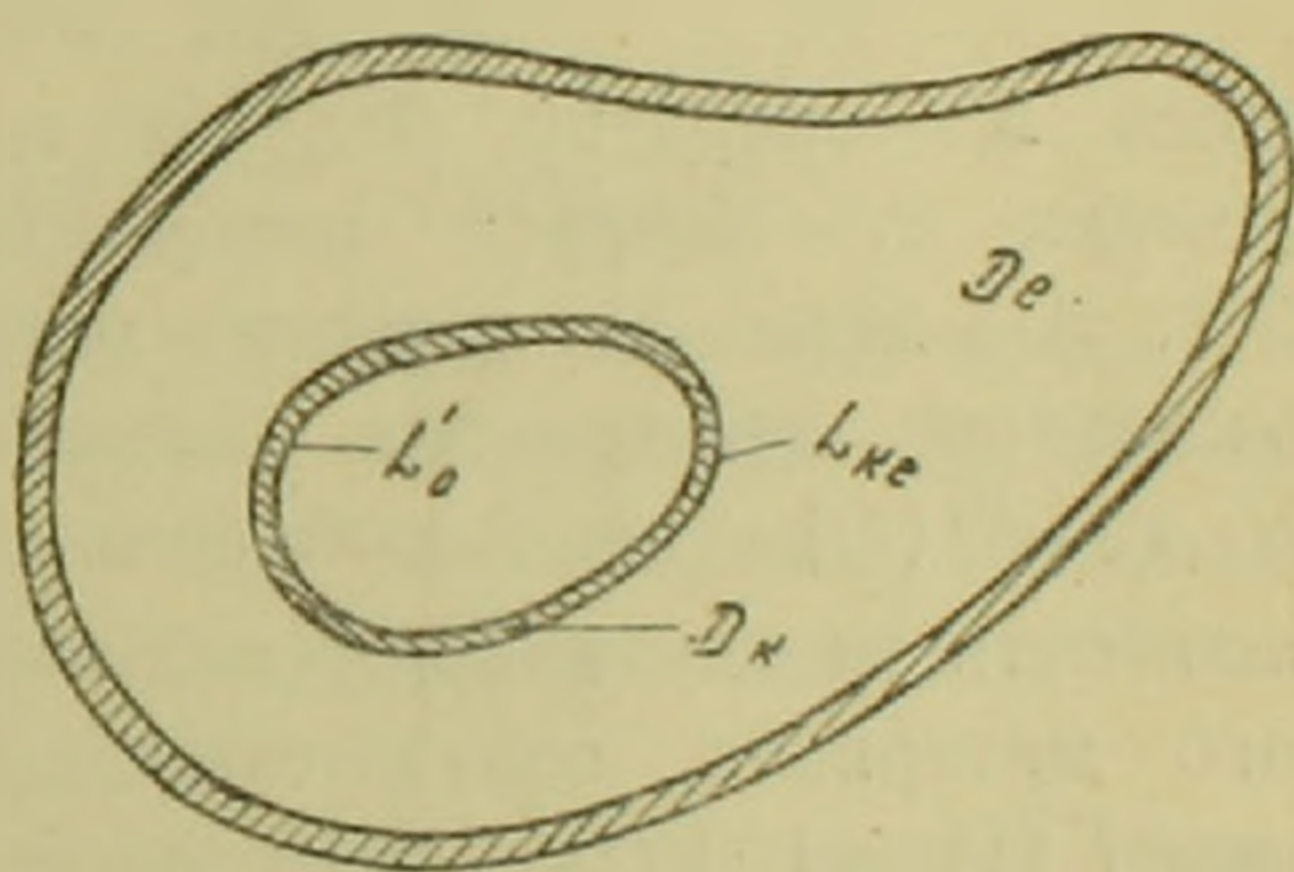
ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Кручение призматического составного стержня с тонким усиливающим покрытием в условиях нелинейной ползучести

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 17/V 1963)

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим призматический стержень, составленный из различных призматических тел. Допустим, что вдоль боковой поверхности и поверхностей продольных отверстий стержень покрыт тонкими усиливающими слоями (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть толщины усиливающих слоев пренебрежимо малы по отношению к остальным размерам поперечного сечения и радиуса кривизны контуров этих слоев.

Рассмотрим один из этих слоев. Область покрытия обозначим через D_k. Допустим, что D_k граничит только с одной из остальных областей, которую обозначим через D_l. Линию раздела D_k и D_l обозначим через L_{kl}, а контур всей области — через L_0 и L_0.

Для области D_k введем координатную систему s и n, где s — длина дуги линии раздела L_{kl}, отсчитываемой от произвольно выбранной на ней точки, а n — длина нормали к L_{kl}, направленной в сторону области D_k. Эту координатную систему можно считать прямолинейной и ортогональной.

Допустим, что материал покрытия не обладает свойством ползучести.

Поместим начало прямоугольной системы координат x, y, z в некоторой точке области D_l, направив ось z параллельно её образующим.

Здесь k и l принимают значения, соответствующие покрытиям и смежным областям поперечного сечения стержня.

Согласно недавно опубликованной работе ([2]), решение рассматриваемой задачи приводится к определению непрерывной в области поперечного сечения стержня функции напряжений $\Phi(x, y, t)$, удовлетворяющей в области D_l нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Phi_l(t) - G_l(t)\int_{\tau_1}^{t}\Delta\Phi_l(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G_l(\tau)}\right]d\tau - 3G_l(t)\int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[F_l(\sigma_i^{(l)})\frac{\partial\Phi_l}{\partial x}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[F_l(\sigma_i^{(l)})\frac{\partial\Phi_l}{\partial y}\right]\right\}\frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau = -2G_l(t)\theta(t), \tag{1.1}$$

и следующим условиям на контуре стержня и на линиях раздела

$$\Phi_k(s, \delta, t) = C_k(t), \tag{1.2}$$

$$\Phi_k(s, 0, t) = \Phi_l(s, 0, t), \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{G_k}\frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = \frac{1}{G_l(t)}\frac{\partial\Phi_l(t)}{\partial n} - \int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial n}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G_l(\tau)}\right]d\tau -$$

$$-3\int_{\tau_1}^{t}F_l[\sigma_i^{(l)}(\tau)]\frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial n}\frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{1.4}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным x и y, t — координата времени, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки, $C_l(t, \tau)$ — мера ползучести материала области D_l, $G_l(t)$ — модуль мгновенной деформации сдвига материала соответствующей области D_l, $F_l[\sigma_i^{(l)}(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, соответствующей области D_l, нормированная условием $F(1) = 1$, $\theta(t)$ — угол закручивания на единицу длины стержня в момент времени t, $\sigma_i^{(l)}(t)$ — интенсивность тензора напряжений, имеющая следующий вид

$$\sigma_i^{(l)}(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial y}\right)^2}, \tag{1.5}$$

$\delta = \delta(s)$ — толщина покрытия, а $C_k(t)$—значение функции напряжений на той части контура области D_0, которая граничит с D_k. Из функций $C_k(t)$ только одна может быть выбрана произвольно, остальные должны быть определены из условия однозначности компонентов перемещения при помощи формулы Бредта [2].

Так как материал покрытия не обладает свойством ползучести, то основное уравнение (1.1) для области D_k примет следующий вид

$$\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\Phi_k}{\partial n^2} = -2G_k\theta(t). \tag{1.6}$$

Как известно [3], в уравнении (1.6) можно пренебречь производной по s и заменить (1.6) уравнением вида

$$\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial n^2} = -2G_k\theta(t). \tag{1.7}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\Phi_k = -G_k\theta(t)\,n^2 + B_k(t)\,n + D_k(t), \tag{1.8}$$

где $B_k(t)$ и $D_k(t)$ — произвольные функции от t.

Из (1.8) и (1.3) непосредственно следует, что

$$B_k(t) = \frac{\partial\Phi_k(s,\,0,\,t)}{\partial n}, \quad D_k(t) = \Phi_l(s,\,0,\,t). \tag{1.9}$$

Тогда, используя (1.2), (1.9) и (1.4), из соотношения (1.8) получим

$$G_l(t)\,\Phi_l - G_k\,G_l(t)\,\theta(t)\,\delta^2 + G_k\frac{\partial\Phi_l}{\partial n}\delta -$$

$$-G_k\,G_l(t)\,\delta\left\{\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial n}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G_l(\tau)}\right]d\tau +\right.$$

$$\left.+3\int_{\tau_1}^{t}F_l\left[\sigma_i^{(l)}(\tau)\right]\frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial n}\frac{\partial C_l(t,\,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right\} = G_l(t)\,C_k(t). \tag{1.10}$$

на L_{kl}

§ 2. *Решение основного интегро-дифференциального уравнения* (1.1). Положим, что $F_l(\sigma_i^{(l)})$ имеет вид

$$F_l(\sigma_i^{(l)}) = \alpha_l + \beta_l(\sigma_i^{(l)})^{m-1} \quad (m > 1), \tag{2.1}$$

где α_l, β_l, m — постоянные параметры, определяемые из опыта.

Как известно [4], экспериментальные исследования показывают, что степенным законом вида (2.1) достаточно хорошо описываются кривые ползучести для ряда материалов. Одновременно опыты показывают, что β_l является малой ($\beta_l < 1$).

Малый параметр β_l для первой области D_1 обозначим через β. Допустим, что β_l выражается через β следующей формулой

$$\beta_l = \lambda_l\,\beta, \tag{2.2}$$

где λ_l — постоянное число, определяемое из опыта, причем $\lambda_1 = 1$.

Тогда, если, следуя работе [2], выражение (2.1) вносить в (1.1), предполагать, что $G_l(t) = G_l = \mathrm{const}$, затем решение полученного нелинейного интегро-дифференциального уравнения представить по степеням малого параметра β

$$\Phi_l(x,\,y,\,t) = \Phi_l^{(0)}(x,\,y,\,t) + \sum_{p=1}^{\infty}\beta_l^p\,\Phi_l^{(p)}(x,\,y,\,t) \tag{2.3}$$

и приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях β, то получим рекуррентные линейные интегро-дифференциальные уравнения. Решения этих уравнений будут [4]

$$\Delta\Phi_l^{(0)}(t) = -2G_l\,\psi_{0,\,l}(t). \tag{2.4}$$

$$\Delta\Phi_l^{(1)}(t) = \psi_{1,\,l}(x,\,y,\,t) + \alpha_l\int_{\tau_1}^{t}\psi_{1,\,l}(x,\,y,\,\tau)\,R_l(t,\,\tau,\,\alpha_l)\,d\tau, \tag{2.5}$$

где $R_l(t, \tau, \alpha_l)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K_l(t, \tau)$.

$$\psi_{0,l}(t) = \theta(t) - \alpha_l \int_{\tau_1}^{t} \theta(\tau) R_l(t, \tau, \alpha_l)\, d\tau, \tag{2.6}$$

$$\psi_{1,l}(t) = \int_{\tau_1}^{t} M_l(\Phi_l^{(0)}) K_l(t, \tau)\, d\tau, \tag{2.7}$$

$$M_l(\Phi_l^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi_l^{(0)}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_l^{(0)}}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial\Phi_l^{(0)}}{\partial x}\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi_l^{(0)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_l^{(0)}}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial\Phi_l^{(0)}}{\partial y}\right\}. \tag{2.8}$$

Если принять, что мера ползучести материала области D_l определяется зависимостью

$$C_l(t, \tau) = \left(\frac{A_{1,l}}{\tau} + C_{0,l}\right)\left[1 - e^{-\gamma_l(t-\tau)}\right], \tag{2.9}$$

где $A_{1,l}$, $C_{0,l}$, γ_l — некоторые параметры, определяемые из опыта, то резольвента $R_l(t, \tau, \alpha_l)$ определится следующей формулой

$$\alpha_l R_l(t, \tau, \alpha_l) = \gamma_l - \eta_l'(\tau) + [\eta_l'(\tau) + \eta_l''(\tau) - \gamma_l \eta_l'(\tau)] \times$$

$$\times\, l^{\eta_l(\tau)} \int_{\tau}^{t} l^{-\eta(x)dx}\, dx. \tag{2.10}$$

Здесь

$$\eta_l(\tau) = \gamma_l \int_{\tau_1}^{\tau}\left[1 + 3G_l \alpha_l \left(\frac{A_{1,l}}{\tau} + C_{0,l}\right)\right] d\tau. \tag{2.11}$$

Значения $\Phi_l^{(0)}, \Phi_l^{(1)}, \cdots$ будут последовательно определяться путем интегрирования полученных рекурентных линейных дифференциальных уравнений, при этом полученные решения должны удовлетворять условиям (1.2), (1.3) и (1.10), причем (1.10) при (2.1) примет следующий вид

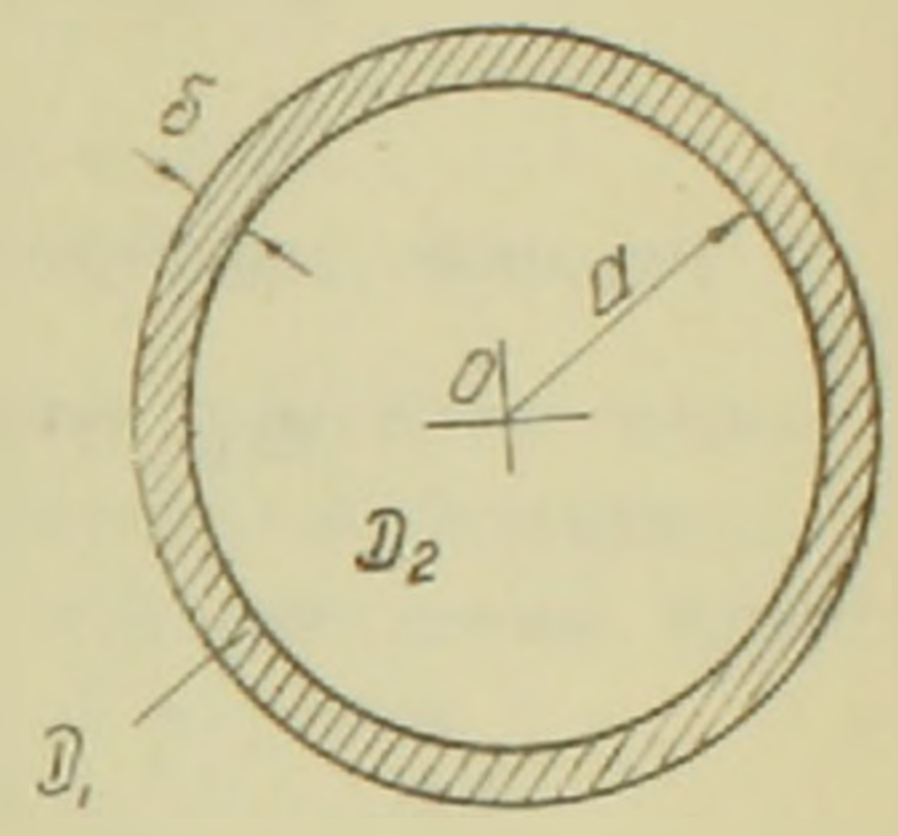
$$G_l\Phi_l - G_k G_l \theta(t)\delta^2 + G_k\delta \frac{\partial\Phi_l}{\partial n} - G_k G_l \delta\left\{\alpha_l \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial n} K_l(t, \tau)\, d\tau +\right.$$

$$\left. + \beta_l \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial n} N_l[\Phi_l(\tau)] K_l(t, \tau)\, d\tau\right\} = C_k G_l, \tag{2.12}$$

где $$N_l(\Phi_l) = \left[\left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}}. \tag{2.13}$$

В выражения $\Phi_l^{(0)}, \Phi_l^{(1)}, \Phi_l^{(2)}, \cdots$ будет входить неизвестная величина $\theta(t)$. Для ее определения нужно значения $\Phi_l^{(0)}, \Phi_l^{(1)}, \Phi_l^{(2)}, \cdots$ подставить в выражения крутящего момента и оттуда определить $\theta(t)$.

§ 3. *Кручение круглого стержня с усиливающим покрытием*. В качестве приложения вышеизложенных результатов рассмотрим кручение круглого стержня с усиливающим покрытием (фиг. 2).



Фиг. 2.

Область поперечного сечения, соответствующую усиливающему материалу стержня, обозначим через D_1, а область, соответствующую основному материалу, — через D_2. Модуль мгновенной деформации сдвига материалов областей D_1 и D_2 соответственно обозначим через G_1 и G_2. Допустим, что материал в области D_2 обладает свойством ползучести, а в области D_1 материал является упругим.

В силу осевой симметрии функция напряжений Φ в данном случае будет зависеть только от r и t, поэтому основное интегро-дифференциальное уравнение (1.1) и контурное условие (2.12) примут следующий вид

$$\Delta\Phi(t) - \alpha\int_{\tau_1}^{t}\Delta\Phi(\tau)K(t,\tau)\,d\tau - \beta\int_{\tau_1}^{t}M[\Phi(\tau)]K(t,\tau)\,d\tau = -2G_2\theta(t), \quad (3.1)$$

$$G_2\Phi - G_1G_2\theta(t)\delta^2 + \delta G_1\frac{\partial\Phi}{\partial r} -$$

$$- \delta G_1G_2\left\{\alpha\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial r}K(t,\tau)\,d\tau + \beta\int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial r}\right]^m K(t,\tau)\,d\tau\right\} = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\Delta\Phi(t) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (3.3)$$

$$M(\Phi) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^m + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^m. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.1) ищем в виде ряда (2.3). Подставляя (2.3) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β, получим рекуррентные линейные интегральные уравнения.

В этом случае, если удовлетворяться только первыми двумя приближениями, то решение нелинейного интегрального уравнения (3.1) можно представить в следующем виде

$$\Delta\Phi(r,t) = 2G_2H_0(t,\tau_1) + \beta(m+1)G_2^m r^{m-1}\Big[H_1(t,\tau_1) +$$

$$+ \alpha\int_{\tau_1}^{t}H_1(\tau,\tau_1)R(t,\tau,\alpha)\,d\tau\Big] + O(\beta^2), \quad (3.5)$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = -\theta(t) - \alpha \int_{\tau_1}^{t} \theta(\tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau. \qquad (3.6)$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} [H_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau. \qquad (3.7)$$

Решение дифференциального уравнения (3.5) будет

$$\Phi(r, t) = C_1(t) \ln r + C_2(t) + \frac{1}{4} A(t) r^2, \qquad (3.8)$$

где

$$A(t) = 2G_2 \Big\{ H_0(t, \tau_1) - \beta \frac{2G_2^{m-1}}{m+1} r^{m-1} \Big[H_1(t, \tau_1) +$$

$$+ \alpha \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \Big] \Big\}. \qquad (3.9)$$

$C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции интегрирования. Из условия ограниченности функции напряжения $\Phi(r, t)$ в области D_2 непосредственно следует, что $C_1(t) = 0$. Подставляя (3.9) в выражения крутящего момента M, определяем значение неизвестной функции $C_2(t)$. Тогда функция напряжений $\Phi(r, t)$ примет следующий вид

$$\Phi(r, t) = \frac{[M}{2\pi a^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} - r^2\right) G_2 H_0(t, \tau_1) -$$

$$- \beta \frac{G_2^m}{m+1} \left(\frac{2a^{m+1}}{m+3} - r^{m+1} \right) \Big[H_1(t, \tau_1) +$$

$$+ \alpha \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \Big]. \qquad (3.10)$$

Для определения $H_0(t, \tau_1)$ воспользуемся условием (3.2), которое в данном случае, при пренебрежении члена, содержащего множитель δ^2, по отношению к остальным членам, примет вид

$$H_0(t, \tau_1) - a_1 \alpha \int_{\tau_1}^{t} H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau +$$

$$+ \beta b_1 H_2(t, \tau_1) - \beta c_1 \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau -$$

$$- \beta d_1 \int_{\tau_1}^{t} [G_2 H_0(\tau, \tau_1) a + \beta G_2^m a^m H_2(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau = l_1. \qquad (3.11)$$

где

$$a_1 = \frac{4\delta G_1 \mu}{a\mu + 4\delta}, \qquad b_1 = \frac{4a^{m-1}G_2^{m-1}}{a\mu + 4\delta}\left(\frac{a\mu}{m+3} + \delta\right),$$

$$c_1 = a_1 \alpha G_2^{m-1} a^{m-1}, \qquad d_1 = a_1 a^{m-1} G_2^{m-1}, \quad l_1 = -\frac{2M}{\pi a^3 (a\mu + 4\delta)}, \quad (3.12)$$

$$H_2(t, \tau_1) = H_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau.$$

(3.11) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно $H_0(t, \tau_1)$. Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод решения и удовлетворяться только первыми двумя приближениями, то для неизвестной функции $H_0(t, \tau_1)$ получим

$$H_0(t, \tau_1) = l_1 B_0(t, \tau_1) +$$

$$+ \beta\left[B_1(t, \tau_1) + a_1 \alpha \int_{\tau_1}^{t} B_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau\right] + O(\beta^2). \quad (3.13)$$

Здесь для $C(t, \tau)$ принято выражение (2.16) и введены следующие обозначения

$$B_0(t, \tau_1) = 1 - 3G_2 \alpha \gamma a_1 \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0\right) \frac{l^{r_1 \tau_1} \tau_1^{p}}{r_1^{1-p}} \left[\bar{\Phi}(r_1 t, p) - \bar{\Phi}(r_1 \tau_1, p)\right],$$

$$p = 3G_2 \alpha \gamma A_1, \quad r_1 = \gamma (1 + 3G_2 \alpha C_0), \quad \bar{\Phi}(\xi, p) = \int_0^{\xi} \frac{l^{-z}}{r_1^{p}},$$

$$B_1(t, \tau_1) = c_1 \int_{\tau_1}^{t} H_1^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau +$$

$$+ d_1 G_2^m a^m \int_{\tau_1}^{t} [H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) + a^{m-1} G_2^{m-1} H_2^{(0)}(\tau, \tau_1)] K(t, \tau) d\tau =$$

$$= -b_2 H_2^{(0)}(t, \tau_1), \quad (3.14)$$

$$H_0^{(0)}(t, \tau_1) = l_1 B_0(t, \tau_1),$$

$$H_1^{(0)}(t, \tau_1) = l_1^m \int_{\tau_1}^{t} [B_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau,$$

$$H_2^{(0)}(t, \tau_1) = H_1^{(0)}(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^{t} H_1^{(0)}(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau.$$

Следовательно, значение $H_0(t, \tau_1)$ известно. Остается определить угол закручивания $\theta(t)$. Для этого нужно решить интегральное уравнение (3.6). Решение этого уравнения будет

$$\theta(t) = - H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^{t} H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau, \tag{3.15}$$

так как $R(t, \tau, \alpha)$ является резольвентой ядра $K(t, \tau)$.

Таким образом, функцию напряжений $\Phi(r, t)$ можно считать известной. Продифференцировав (3.10) по r, найдем выражение касательного напряжения.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ս. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Ուժեղացնող բարակ ծածկույթ ունեցող փոփոխական տրամագծով բաղադրյալ պրիզմայաձև ձողի ոլորումը ոչ գծային սողքի պայմաններում

Ներկա աշխատանքում քննարկվում է ուժեղացնող բարակ ծածկույթ ունեցող բաղադրյալ պրիզմայաձև ձողի ոլորման խնդիրը, երբ հաշվի են առնվում նյութերի ոչ գծային սողքի հատկությունները և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխականությունը։

Այս խնդրի լուծումը գծային սողքի դրվածքով ուսումնասիրված է ([3]) աշխատանքում։

Քննարկվող խնդրի լուծման ժամանակ, որպես հիմնական ֆիզիկական հիպոթեզ, ընդունվում է ([1]) աշխատանքում շարադրված ոչ գծային սողքի տեսությունը՝ նյութի ծերացման հաշվառումով։

Աշխատանքում ստացված են խնդրի ոչ գծային սողքի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումները։ Ստացված հավասարումները լուծելու համար օգտագործվում է փոքր պարամետրի մեթոդը, որը զարգացված է ([4]) աշխատանքում։

Որպես օրինակ քննարկվում է ուժեղացնող ծածկույթով բաղադրյալ շրջանային ձողի ոլորման խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян.* Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.-Л., 1952. [2] *М. М. Манукян, В. С. Саркисян.* Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), 3 (1963). [3] *Н. Х. Арутюнян, К. С. Чобанян.* Известия АН СССР, отделение техн. наук, 6 (1956). [4] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян.* Известия АН СССР, механика и машиностроение, 6 (1959).