

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

Об одной задаче нелинейно-ползучей конической оболочки вращения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 7/V 1963)

В настоящей заметке на основе безмоментной теории оболочек рассматривается ползучесть конической оболочки вращения под действием слабо меняющейся во времени нормальной поверхностной нагрузки, когда один конец оболочки защемлен, а другой растягивается (сжимается) вдоль образующих. В качестве теории ползучести принимается теория нелинейной наследственности ⁽¹⁾. Решение задачи сводится к определению одной функции интегрирования, относительно которой получается нелинейное интегральное уравнение. В случае, когда кольцевые напряжения по величине превосходят упруго-мгновенные продольные напряжения (последние полагаются сжимающими), переходя в уравнениях ползучести от интенсивности касательных напряжений к близкой ей величине — максимальному касательному напряжению, дается точное решение в замкнутом виде.

1. Рассмотрим круговую коническую оболочку постоянной толщины h . Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности будем определять длиной отрезка по образующей s , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка несет слабо меняющуюся во времени t равномерно распределенную нормальную поверхностную нагрузку интенсивностью $p(t)$ и пусть ее один конец ($s = s_0$) защемлен, а другой ($s = l$) растягивается (сжимается) по направлениям образующих на величину $u_0(t)$.

Краевые условия задачи будут

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_0(t) \\ v(0, t) = v(l, t) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Пользуясь уравнениями равновесия и соответствующими геометрическими соотношениями безмоментной теории оболочек, с учетом (1.1) для напряжений σ_1 , σ_2 и перемещений u , v , w получим ⁽²⁾

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + A_1 C(t), \quad \sigma_2 = -\frac{pr}{h \cos \vartheta} \quad (1.2)$$

$$u = \int_0^s \varepsilon_1 ds, \quad v = 0, \quad w = \frac{r}{\cos \vartheta} \varepsilon_2 + \operatorname{tg} \vartheta \int_0^s \varepsilon_1 ds, \quad (1.3)$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s, t) = \frac{p(t)}{2h \cos \vartheta} \frac{r_0^2 - r^2(s)}{r(s)}, \quad A_1(s) = \frac{1}{r(s) h \cos \vartheta}, \quad r_0 = r(0) \quad (1.4)$$

r —расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения,
 ϑ —угол конусности.

Таким образом задача сводится к определению функции интегрирования $C(t)$.

В общем случае пространственного напряженного состояния уравнение, связывающее интенсивность напряжений $\sigma_i(t)$ и интенсивность деформаций $\varepsilon_i(t)$ с учетом ползучести материала и изменения его модуля мгновенной деформации, имеет вид ⁽¹⁾

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_i(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.5)$$

Здесь $C(t, \tau)$ —мера ползучести материала при одноосном напряженном состоянии, $F(\sigma_i)$ —некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, определяемая из опыта в результате испытания на простую ползучесть, нормированная условием $F(1) = 1$. $G(t)$ —модуль мгновенной деформации сдвига, τ_1 —возраст материала в момент приложения нагрузки.

Пользуясь обычными формулами перехода и принимая, что девиаторы напряжений и деформаций имеют одинаковые главные направления в любой момент времени, а объемная деформация упругая, из (1.5) получим ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) = K\sigma + \frac{\sigma_1 - \sigma}{2G} - \frac{\sigma_1 - \sigma}{2\sigma_1} \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} \right] + \right. \\ \left. + F[\sigma_i(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(t) = K\sigma + \frac{\sigma_2 - \sigma}{2G} - \frac{\sigma_2 - \sigma}{2\sigma_1} \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} \right] + \right. \\ \left. + F[\sigma_i(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau. \end{aligned}$$

* Обозначение всех аргументов часто будем опускать, оставляя только необходимые.

Здесь $K = K(t)$ — коэффициент объемного расширения. Среднее давление σ и интенсивность напряжений σ_1 имеют вид (4)

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (1.7)$$

Соотношения ползучести (1.6) описывают процессы деформирования с учетом как старения, так и наследственности материала оболочки.

2. Внося значения напряжений σ_1, σ_2 из (1.2) в выражение интенсивности (1.7), получим

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{A_2 + A_3 C(t) + A_1^2 C^2(t)}, \quad (2.1)$$

где

$$A_2(s, t) = \frac{p^2(t)}{4h^2 r^2 \cos^2 \vartheta} [(r_0^2 - 2r^2)^2 + 4r^4] \quad (2.2)$$

$$A_3(s, t) = -\frac{p^2(t)}{h^2 r^2 \cos^2 \vartheta} (2r^2 - r_0^2).$$

Краевое условие $u(l, t) = u_0(t)$ с помощью первого соотношения (1.6), (2.1) и (1.2) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} C(t) - \frac{C(t) G h \sin 2\vartheta}{2\sqrt{3} (1 + KG) \ln \frac{r_0}{r_1}} \int_0^l \frac{A_1}{(A_2 + A_3 C(t) + A_1^2 C^2(t))^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \int_{\tau_1}^t \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (A_2 + A_3 C(\tau) + A_1^2 C^2(\tau))^{1/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{G(\tau)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + F \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (A_2 + A_3 C(\tau) + A_1^2 C^2(\tau))^{1/2} \right] \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} ds = \\ = \frac{u_0(t) - \frac{p(t) r_0^2 \ln \frac{r_0}{r_1}}{3Gh \sin 2\vartheta} (1 + KG) + \frac{p(t) K (r_1^2 - r_0^2)}{2h \sin 2\vartheta}}{\frac{1 + KG}{3G} \frac{2 \ln \frac{r_0}{r_1}}{h \sin 2\vartheta}} + \\ + \frac{G h \sin 2\vartheta}{4\sqrt{3} (1 + KG) \ln \frac{r_0}{r_1}} \int_0^l \frac{2\bar{\sigma}_1 - \sigma_2}{(A_2 + A_3 C(t) + A_1^2 C^2(t))^{1/2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_{\tau_1}^t \frac{1}{V^3} \left(A_2 + A_3 C(\tau) + A_1^2 C^2(\tau) \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{G(\tau)} \right) + \right. \\ \left. + F \left[\frac{1}{V^3} \left(A_2 + A_3 C(\tau) + A_1^2 C^2(\tau) \right)^{1/2} \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} ds. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) является сложным нелинейным интегральным уравнением относительно функции $C(t)$. Оно допускает лишь численное решение.

Допустим, что для любых s и t

$$\sigma_2 \leq \sigma'_1 \leq \sigma_3 = 0, \quad \text{где} \quad \sigma'_1 = \bar{\sigma}_1 + A_1 C'(t). \quad (2.4)$$

Пользуясь формулами (1.2) и (1.4), из (2.3) и (2.4) находим следующее ограничение внешних воздействий

$$-\frac{p(t)(r_0^2 + r_1^2)}{2} \leq C'(t) \leq -\frac{p(t)(r_0^2 - r_1^2)}{2}, \quad (2.5)$$

где

$$C'(t) = \frac{u_0(t) - \frac{p(t)r_0^2 \ln \frac{r_0}{r_1}}{3Gh \sin 2\vartheta} (1 + KG) + \frac{p(t)K(r_0^2 - r_1^2)}{2h \sin 2\vartheta}}{\frac{1 + KG}{3G} \frac{2 \ln \frac{r_0}{r_1}}{h \sin 2\vartheta}}, \quad (2.6)$$

при соблюдении которого упруго-мгновенные продольные напряжения в любой момент времени по величине будут меньше кольцевых напряжений.

Если полагать

$$K(t) = \frac{1 - 2\nu(t)}{E(t)}, \quad G(t) = \frac{E(t)}{2[1 + \nu(t)]}, \quad (2.7)$$

где ν , E — упругие постоянные материала, то (2.5) с учетом (2.6) можно привести к виду

$$-\frac{p(t) \left[2r_1^2 \ln \frac{r_0}{r_1} + (1 - 2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \right]}{4Gh(1 + \nu) \sin 2\vartheta} \leq u_0(t) \leq \\ \leq \frac{p(t) \left[2r_1^2 \ln \frac{r_0}{r_0} - (1 - 2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \right]}{4Gh(1 + \nu) \sin 2\vartheta}. \quad (2.8)$$

При достаточно больших t перемещение конца оболочки $u_0(t)$ по сравнению с тем перемещением, которое вызывается деформациями

* Штрихом обозначены значения соответствующих величин без учета влияния ползучести и наследственности изменения мгновенного модуля деформации материала, т. е. упруго-мгновенные значения.

ползучести. слишком мало и им можно пренебречь. Следовательно, напряженное состояние в оболочке для больших t будет определяться только деформациями ползучести, которые не вызывают изменения объема. Поэтому продольные напряжения для больших t по величине почти в два раза будут меньше кольцевых напряжений, которые не зависят от ползучести материала (см. (1.2)). С другой стороны, при монотонности внешних воздействий $p(t)$ и $u_0(t)$ напряжения σ_1 вследствие ползучести во времени будут меняться тоже монотонно. Следовательно, при соблюдении условий (2.5), (2.8) для истинных напряжений будем иметь

$$\sigma_2 \ll \sigma_1 \leq \sigma_3 = 0. \quad (2.9)$$

Тогда максимальное касательное напряжение будет

$$\tau_{\max}(s, t) = \frac{|\sigma_2|}{2} = \frac{p(t) r(s)}{2h \cos \vartheta} \quad (2.10)$$

Заменяя в уравнениях ползучести (1.6) интенсивность касательных напряжений максимальным касательным напряжением и удовлетворяя краевому условию $u(l, t) = u_0(t)$, для определения искомой функции $C(t)$ получим следующую формулу

$$C(t) = \frac{C'(t) + F_1(t)}{1 - F_2(t)}, \quad (2.11)$$

где

$$F_1(t) = \frac{G(t) h \sin 2\vartheta}{4[1 + K(t) G(t)]} \int_0^l \frac{2\bar{\sigma}_1 - \sigma_2}{\tau_{\max}(s, t)} \left\{ \int_{\tau_1}^t \left[\tau_{\max}(s, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{G(\tau)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + F\left(\tau_{\max}(s, \tau) \right) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} ds. \quad (2.12)$$

$$F_2(t) = \frac{G(t) h \sin 2\vartheta}{2[1 + K(t) G(t)]} \int_0^l \frac{A_1}{\tau_{\max}(s, t)} \left\{ \int_{\tau_1}^t \left[\tau_{\max}(s, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{G(\tau)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + F\left(\tau_{\max}(s, \tau) \right) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} ds. \quad (2.13)$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Պատման կոնական քաղաճի ոչ գծային սողի մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է մի ծայրում ամրակցված, մյուս ծայրում ծնիչների ուղղությամբ ձգվող (սեղմվող) կոնական պատման թաղանթի շկայունացված սողի խնդիրը, երբ թաղանթը բեռնված է ժամանակի ընթացքում դանդաղ փոփոխվող հավասարաչափ բաշխված մակերևութա-

ին նորմալ ուժերով, ինչի լուծումը բերվում է միայն ժամանակից կախված մեկ ֆունկցիայի որոշման, որի նկատմամբ ոչ գծային ժառանգականության տեսության (1) հիման վրա ստացվում է բարդ, ոչ գծային ինտեգրալ հավասարում, ևյն ղեպքում, երբ երկայնական լարումները սեղմող ևն և չափով չեն դերագանցում շրջանային լարումներին, խնդիրը լուծվում է ճշգրիտ։ Ընդ որում սողքի հավասարումներում շոշափող լարումների ինտենսիվությունը փոխարինվում է նախօրոք հայտնի մաքսիմում շոշափող լարմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ЧРԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1952. ² В. И. Розенблюм, О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек, ПМТФ, № 4, 1960. ³ Ю. Н. Работнов, Некоторые вопросы теории ползучести, Вестник МГУ, № 10, 1948. ⁴ Л. М. Качанов, Теория ползучести, Физматгиз, М., 1960.