ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

Об изгибе защемленной прямоугольной балки

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 17/V 1963)

Известно, что классическое решение задачи об изгибе консольной балки прямоугольного сечения обладает существенным недостатком: граничные условия в заделанном конце выполняются точно только в средней точке сечения. Более точно удовлетворяются граничные условия в заделанном конце в работе (1), где на заделке удовлетворены весьма смягченные условия, именно: $u=0$, $v=0$ в трех и пяти точках на краю $x=0$. Очевидно, что распределение напряжений вблизи места закрепления консоли будет зависеть в таких условиях от самого способа закрепления.

В настоящей работе приводится решение смешанной плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Стороны $y=0$ $y=h$ свободны от напряжений. На конце балки $x=l$ известны касательные напряжения; на этом конце нормальные напряжения равны нулю. Другой конец балки $x=0$ предполагается заделанным, т. е. во всех точках края $x=0$ имеем $u=0$, $v=0$.

Функция напряжений рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье. Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных уравнений. Доказывается, что полученная система квазивполне регулярна и имеет ограниченные сверху свободные члены.

Подобные методы решения плоской задачи теории упругости для прямоугольника были применены в работах (1−5).

1. Функция напряжений Эри при отсутствии массовых сил удовлетворяет (6) дифференциальному уравнению

$$\Delta^2\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \tag{1.1}$$

внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant h$.

Напряжения через функцию Φ выражаются следующим образом

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} \tag{1.2}$$

перемещения определяются соотношениями

$$u = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,dx - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\} - a\cdot y + b,$$

$$v = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dy - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\} + a\cdot x + c. \tag{1.3}$$

Здесь E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, a, b и c—постоянные, которые определяются из условий $u(0, 0) = u\ (0, h) = v\ (0, y) = 0$.

Рассмотрим плоское напряженное состояние прямоугольника, на контуре которого выполняются следующие условия

$$\sigma_y(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = \sigma_y(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = \sigma_x(l, y) = u\,(0, y) = v\,(0, y) = 0$$

$$\tau_{xy}(l, y) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\cos\beta_k y. \tag{1.4}$$

Функцию напряжений ищем в виде

$$\Phi(x, y) = Axy + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{ch}\alpha_k y + B_k \operatorname{sh}\alpha_k y + \alpha_k y(C_k \operatorname{ch}\alpha_k y + D_k \operatorname{sh}\alpha_k y)]\times$$

$$\times\cos\alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty}[E_k \operatorname{ch}\beta_k x + F_k \operatorname{sh}\beta_k x + \beta_k x(G_k \operatorname{ch}\beta_k x + H_k \operatorname{sh}\beta_k x)\sin\beta_k y, \tag{1.5}$$

где

$$\alpha_k = (2k-1)\frac{\pi}{2l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < h. \tag{1.6}$$

Используя граничные условия (1.4), после некоторых преобразований для определения неизвестных коэффициентов a, b, c, A, A_k, $B_k, \cdots, H_k$, получаем соотношения

$$a = \frac{\nu}{2E}\cdot b_0, \; b = 0, \; c = -\frac{2}{Eh}\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k + D_k \operatorname{th}\frac{\alpha_k h}{2}\right)\operatorname{sh}\alpha_k h,$$

$$A = -\frac{b_0}{2}, \quad A_k = 0, \quad B_k = -\alpha_k h(D_k + C_k\cdot\operatorname{cth}\alpha_k h), \tag{1.7}$$

$$E_k = -\left[G_k\cdot\left(\beta_k l + \frac{1-\nu}{1+\nu}\operatorname{th}\beta_k l\right) + H_k\cdot\beta_k l\cdot\operatorname{th}\beta_k l\right], \quad F_k = \frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot G_k$$

и бесконечную систему линейных уравнений

$$X_p = \sum_{k=1,3,}^{\infty} a_{pk}\cdot Z_k + \sum_{k=1,3,}^{\infty} b_{pk}\cdot W_k + m_p,$$

$$Y_p = \sum_{k=2,4,}^{\infty} c_{pk}\cdot Z_k + \sum_{k=2,4,}^{\infty} d_{pk}\cdot W_k + n_p ,$$

$$(p=1,2,\cdots) \qquad (1.8)$$

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} e_{pk}\cdot X_k + \sum_{k=1}^{\infty} f_{pk}\cdot Y_k + r_p ,$$

$$W_p = \sum_{k=1}^{\infty} g_{pk}\cdot X_k + \sum_{k=1}^{\infty} h_{pk}\cdot Y_k + s_p ,$$

где

$$C_k = -(-1)^k \frac{h}{\alpha_k^2}\left(X_k\cdot \operatorname{th}\frac{\alpha_k h}{2} + Y_k\cdot \operatorname{cth}\frac{\alpha_k h}{2}\right), \quad D_k = (-1)^k \frac{h}{\alpha_k^2}(X_k + Y_k), \qquad (1.9)$$

$$G_k = \frac{l}{\beta_k^2}(Z_k + W_k), \quad H_k = -\frac{l}{\beta_k^2 \operatorname{ch}\beta_k l}\left[Z_k\cdot(\operatorname{sh}\beta_k l - 1) + W_k\cdot(\operatorname{sh}\beta_k l + 1)\right],$$

$$a_{pk} = \frac{4\alpha_p^2}{h\zeta_p}\left[\beta_k - \frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},$$

$$b_{pk} = -\frac{4\alpha_p^2}{h\zeta_p}\left[\beta_k + \frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},$$

$$(1.10)$$

$$c_{pk} = \frac{4\alpha_p^2}{h\eta_p}\left[\beta_k - \frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},$$

$$d_{pk} = -\frac{4\alpha_p^2}{h\eta_p}\left[\beta_k + \frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},$$

$$e_{pk} = \frac{4\beta_p^2}{l}\times$$

$$\times\frac{[1-(-1)^p](M_p+N_p)}{M_p^2 - N_p\cdot L_p}\left[\alpha_k + (-1)^k\frac{R_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$f_{pk} = \frac{4\beta_p^2}{l}\times$$

$$\times\frac{[1+(-1)^p](M_p+N_p)}{M_p^2 - N_p\cdot L_p}\left[\alpha_k + (-1)^k\frac{R_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$(1.11)$$

$$g_{pk} = -\frac{4\beta_p^2}{l}\times$$

$$\times\frac{[1-(-1)^p](M_p+L_p)}{M_p^2 - N_p\cdot L_p}\left[\alpha_k - (-1)^k\frac{Q_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$h_{pk} = -\frac{4\beta_p^2}{l}\times$$

$$\times \frac{[1+(-1)^p](M_p+L_p)}{M_p^2-N_p\cdot L_p}\left[\alpha_k-(-1)^k\frac{Q_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$m_p=0,\quad n_p=\frac{(-1)^p}{lh}\cdot\frac{b_0}{\alpha_p\eta_p},\quad r_p=-\frac{b_p}{l}\cdot\frac{M_p+N_p}{M_p^2-N_p\cdot L_p},$$

$$s_p=\frac{b_p}{l}\cdot\frac{M_p+L_p}{M_p^2-N_p\cdot L_p},$$

(1.12)

$$\zeta_p=\left(1+\frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2},\quad \eta_p=\left(1-\frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2},$$

$$R_p=\frac{M_p-N_p}{M_p+N_p},$$

$$Q_p=\frac{M_p-L_p}{M_p+L_p},\quad L_p=\frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta_p l-1}{\operatorname{ch}\beta_p l}-\frac{\operatorname{sh}\beta_p l+1}{\operatorname{ch}\beta_p l}+\frac{2\beta_p l}{\operatorname{ch}\beta_p l}\cdot\operatorname{th}\beta_p l.$$

(1.13)

$$M_p=\frac{4}{1+\nu}\operatorname{th}\beta_p l+\frac{2\beta_p l}{\operatorname{ch}^2\beta_p l},$$

$$N_p=\frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta_p l+1}{\operatorname{ch}\beta_p l}-\frac{\operatorname{sh}\beta_p l-1}{\operatorname{ch}\beta_p l}-\frac{2\beta_p l}{\operatorname{ch}\beta_p l}\operatorname{th}\beta_p l.$$

2. Совокупность бесконечных систем (1.8) квазивполне регулярна.

Для суммы абсолютных значений коэффициентов уравнений первой бесконечной системы (1.8) при p нечетном будем иметь

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1,3,}^{\infty}|b_{pk}|=\frac{4x_p^2}{\pi\zeta_p}\left\{\sum_{k=1,3,}^{k_p^0}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]-\right.$$

$$-\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]-$$

$$-\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]+$$

$$\left.+\sum_{k_p^1+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]\right\},\tag{2.1}$$

Здесь k_p^0 и k_p^1 нечетные числа, определяемые из следующих неравенств

$$k + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{x_p^2 - \nu \cdot k^2}{x_p} \geqslant 0 \quad \text{при всех нечетных } k < k_p^0,$$

$$k - \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{x_p^2 - \nu \cdot k^2}{x_p} \leqslant 0 \quad \text{при всех нечетных } k < k_p^1. \tag{2.2}$$

Из формул (2.2) получим

$$k_p^0 \leqslant \nu_0 \cdot x_p, \quad k_p \leqslant \nu_1 \cdot x_p, \tag{2.3}$$

где

$$x_p = \frac{a_p h}{\pi} = (2p-1)\frac{h}{2l}, \quad \nu_0 = \frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu} + (1+\nu)}{2\nu},$$

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu} - (1+\nu)}{2\nu}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) легко заметить, что

$$k_p^0 \geqslant k_p^1. \tag{2.5}$$

В силу (2.5) для выражения (2.1) будем иметь

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1,3,}^{\infty} |b_{pk}| \leqslant \frac{8x_p^2}{\pi \zeta_p(x_p)} \left\{ \sum_{k=1,3,}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + x_p^2)^2} + J_1(x_p, \nu) \right\} = \varphi_1(x_p, \nu), \tag{2.6}$$

где

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + x_p^2)^2} \leqslant S_1(x_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x_p^2)^2} + \dfrac{21 + x_p^2}{4(9 + x_p^2)^2} & \text{при } x_p \leqslant 3 \\ \dfrac{3 + x_p^2}{4(1+x_p^2)^2} + \dfrac{1}{8x_p^3} & \text{при } x_p > 3 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$J_1(x_p, \nu) \leqslant \frac{1}{4x_p^2} \left\{ \frac{\nu_0}{1+\nu_0^2} - \frac{x_p^2}{x_p^2 + (2 + \nu_0 \cdot x_p)^2} + \frac{1}{1+\nu_1^2} + \right.$$

$$+ \frac{(2 + \nu_1 \cdot x_p)\, x_p}{x_p^2 + (2 + \nu_1 \cdot x_p)^2} - \frac{x_p^2}{1 + x_p^2}\left(1 + \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{x_p}\right) + \frac{1 + 2\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{x_p} +$$

$$\left. + \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x_p} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\left[\operatorname{arctg} \nu_0 + \operatorname{arctg}\left(\nu_1 + \frac{2}{x_p}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \right\}. \tag{2.8}$$

Оценки (2.7) получаются при помощи формул для приближенного интегрирования ([2]).

Из (2.6)—(2.8) и (1.13) получаем

$$\lim_{x_p \to \infty} \varphi_1(x_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_1(\nu), \tag{2.9}$$

где

$$f_1(\nu)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\nu_0-1}{1+\nu_0^2}+\frac{1+\nu_1}{1+\nu_1^2}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\operatorname{arctg}\nu_0-\operatorname{arctg}\nu_1-\frac{\pi}{2}\right)-1\right]. \tag{2.10}$$

Расчеты показывают, что

$$f_1(0)=0{,}5,\quad f_1(0{,}5)=0{,}3. \tag{2.11}$$

Для производной функции $f_1(\nu)$ имеем

$$f_1'(\nu)=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+\nu)^2}\left[\operatorname{arctg}\nu_0+\operatorname{arctg}\nu_1-\frac{\pi}{2}\right]. \tag{2.12}$$

Обозначим

$$z=\operatorname{arctg}\nu_0+\operatorname{arctg}\nu_1. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\operatorname{tg}z=\frac{\nu_0+\nu_1}{1-\nu_0\cdot\nu_1}=-\frac{\sqrt{(1+\nu)^2+4\nu}}{1-\nu}. \tag{2.14}$$

Следовательно,

$$z>\frac{\pi}{2}. \tag{2.15}$$

На основании (2.12) и (2.15) получаем

$$f_1'(\nu)<0\quad\text{при}\quad 0\leqslant\nu\leqslant 0{,}5 \tag{2.16}$$

Из отрицательности $f_1'(\nu)$ следует, что функция $f_1(\nu)$ монотонно убывает, а из (2.11) получаем, что она меняется в пределах от 0,5 до 0,3. Поэтому функция $f_1(\nu)$ получает свое максимальное значение при $\nu=0$. Следовательно,

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1,3,}^{\infty}|b_{pk}|\leqslant\frac{2}{\pi}+f_1^{\max}(\nu)\leqslant 1{,}1366. \tag{2.17}$$

Оценки для сумм абсолютных значений коэффициентов остальных уравнений (1.8) при p нечетном получаем аналогичным образом

$$\sum_{k=2,4,}^{\infty}|c_{pk}|+\sum_{k=2,4,}^{\infty}|d_{pk}|\leqslant\frac{2}{\pi}+f_1^{\max}(\nu)\leqslant 1{,}1366. \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|e_{pk}|\leqslant\frac{2}{\pi}+f_2^{\max}(\nu)\leqslant 0{,}7535. \tag{2.19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g_{pk}|\leqslant\frac{2}{\pi}+f_2^{\max}(\nu)\leqslant 0{,}7535. \tag{2.20}$$

Подставляя из первых двух систем (1.8) X_p и Y_p в следующие системы, получаем новую систему для Z_p и W_p

$$Z_p=\sum_{k=1}^{\infty}e_{pk}\left(\sum_{n=1,3,}^{\infty}a_{kn}\cdot Z_n+\sum_{n=1,3,}^{\infty}b_{kn}\cdot W_n+\right)+\sum_{k=1}^{\infty}e_{pk}\cdot m_k+r_p$$

$$(p=1,\ 3,\ 5,\cdots) \tag{2.21}$$

$$W_p=\sum_{k=1}^{\infty}g_{pk}\left(\sum_{n=1,3,}^{\infty}a_{kn}\cdot Z_n+\sum_{n=1,3,}^{\infty}b_{kn}\cdot W_n\right)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{pk}\cdot m_k+s_p.$$

Для сумм абсолютных значений коэффициентов системы (2.21) будем иметь оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty}|e_{pk}|\cdot\left(\sum_{n=1,3,}^{\infty}|a_{kn}|+\sum_{n=1,3,}^{\infty}|b_{kn}|\right)\leqslant\left[\frac{2}{\pi}+f_2^{\max}(\nu)\right]\left[\frac{2}{\pi}+f_1^{\max}(\nu)\right]\leqslant$$

$$\leqslant 0{,}7535\cdot 1{,}1366=1-\theta. \tag{2.22}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g_{pk}|\cdot\left(\sum_{n=1,3,}^{\infty}|a_{kn}|+\sum_{n=1,3,}^{\infty}|b_{kn}|\right)\leqslant\left[\frac{2}{\pi}+f_2^{\max}(\nu)\right]\left[\frac{2}{\pi}+f_1^{\max}(\nu)\right]\leqslant$$

$$\leqslant 0{,}7535\cdot 1{,}1366=1-\theta, \tag{2.23}$$

где

$$0<\theta=0{,}1436 \quad \text{при} \quad 0\leqslant\nu\leqslant 0{,}5. \tag{2.24}$$

Аналогичные оценки получим для сумм коэффициентов бесконечной системы для X_p и Y_p.

Точно такие же оценки получаются при p четном.

Нетрудно заметить, что свободные члены бесконечной системы (2.21) будут ограничены сверху и имеют порядок не ниже, чем p^{-1}, если внешняя нагрузка удовлетворяет условиям Дирихле.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к отысканию значений X_k, Y_k, Z_k и W_k, определяемых квазивполне регулярной системой бесконечных уравнений с ограниченными сверху свободными членами.

Квазивполне регулярность бесконечной системы (1.8) вместе с ограниченностью свободных членов (1.12) позволяет определять искомые коэффициенты разложения $\Phi(x, y)$ (1.5) с любой степенью точности ([7]). А при помощи этих оценок определяются верхняя и нижняя границы для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и перемещений u и v.

Отметим, что в случае, когда продольные кромки прямоугольника $y=0$ и $y=h$ не свободны от внешней нагрузки, а перемещения u, v и напряжения σ_x, τ_{xy} заданы произвольно, новых трудностей при решении этой задачи не возникает, так как система уравнений в этом случае будет отличаться от системы (1.8) лишь свободными членами, которые не влияют на ее регулярность.

В заключение выражаю глубокую благодарность К. С. Чобаняну, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Դ. Հ. ԳԱԼՖԱՅԱՆ

Ամրակցված ուղղանկյուն հեծանի ծռման մասին

Հայտնի է, որ ուղղանկյուն կոնսոլային հեծանի ծռման խնդրի կլասիկ լուծման մեջ հեծանի ամրակցված հատվածքում եզրային պայմանները բավարարվում են միայն մի կետում։ Ամրակցված հատվածում եզրային պայմանները համեմատաբար ճիշտ են բավարարված (1) աշ-

խառնության մեջ։ Ակնհայտ է, որ լարվածային վիճակի բաշխման օրենքը ամրակցված եզրի մոտ էապես կախված է այդ եզրի ամրացման պայմաններից։

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է առաձգականության տեսության խառը հարթ խնդիրը ուղղանկյուն կոնսոլի համար, երբ ուղղանկյան $y = 0$ և $y = h$ եզրերը ազատ են արտաքին բեռից, $x = l$ եզրում ազդում են միայն շոշափող լարումները, իսկ $x = 0$ հիմքը ենթադրվում է ամրակցված ($x = 0$ եզրի բոլոր կետերում ունենք $u = 0$, $v = 0$ պայմանները)։

Խնդրի լուծումը բերվում է ուղղանկյան ներսում լարումների Էրիի $\Phi(x, y)$ ֆունկցիայի որոնմանը խառը եզրային պայմաններում։

Դիտարկվող խնդրում $\Phi(x, y)$ ֆունկցիան ներկայացվում է եռանկյունաչափական շարքերով, որի վերլուծության գործակիցները որոշելու համար ստացվում են գծային հավասարումների անվերջ սիստեմ։ Ապացուցվում է ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի կվազիլիովին ռեգուլյարությունը և ազատ անդամների վերևից սահմանափակ լինելը։

ЛИТЕРАТУРА ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. К. Прокопов.* Инженерный сборник, т. 11, 151—160, 1952. [2] *Б. Л. Абрамян.* ПММ, т. 21, № 1, 89—100, 1957. [3] *Г. М. Валов* Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 3, 133—142, 1961. [4] *В. К. Прокопов* ПММ, т. 16, № 1, 45—56, 1952. [5] *Б. Л. Абрамян* и *М. М. Манукян* ДАН АрмССР, т. 25, № 4, (1957). [6] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТИ, М.—Л., 1934. [7] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов Л. В.* Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1962.