

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян, чл.-корр. АН Армянской ССР

Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты

(Представлено 8/V 1963)

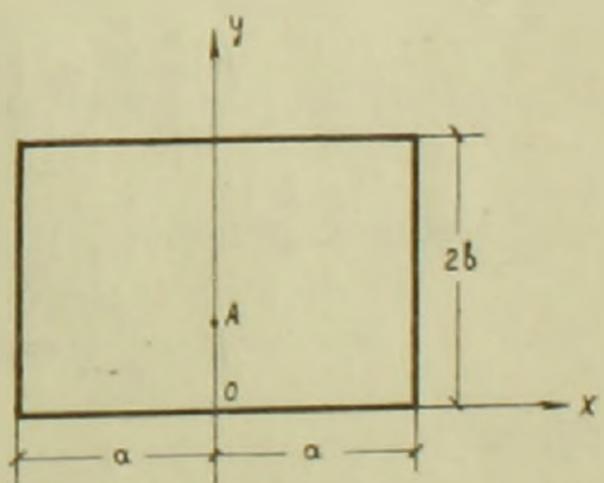
1. Рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной плиты (фиг. 1), опертой по сторонам  $y=0$  и  $y=2b$  и как угодно закрепленной по сторонам  $x=\pm a$ . Вдоль отрезка  $OA$  заданы некоторые возможные условия закрепления.

При решении рассматриваемой задачи применяем метод, развитый автором (1).

Представим прогиб плиты в следующем виде

$$\begin{aligned}
 w = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x + C_k \operatorname{sh} \lambda_k x + \\
 + D_k x \operatorname{ch} \lambda_k x) \sin \lambda_k y \pm \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\delta_k}{2} \left[ \operatorname{ch} \lambda_k x - \frac{1-\sigma}{2} \lambda_k x \operatorname{sh} \lambda_k x \right] + \right. \\
 \left. + \frac{\alpha_k}{4\lambda_k} [(1+\sigma) \operatorname{sh} \lambda_k x + (1-\sigma) \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x] - \right. \\
 \left. - \frac{m_k}{4D\lambda_k} x \operatorname{sh} \lambda_k x + \frac{q_k}{4D\lambda_k^3} (\operatorname{sh} \lambda_k x - \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x) \right\} \sin \lambda_k y, \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

где  $f(x, y)$  — частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $D$  — жесткости плиты;  $A_k, B_k, C_k, D_k, \delta_k, \alpha_k, m_k$  и  $q_k$  постоянные коэффициенты, подлежащие определению, а  $\lambda_k = k\pi/2b$ . Из двойных знаков перед второй суммой — плюс относится к области  $x \geq 0$ , а минус — к области  $x \leq 0$ .



Фиг. 1.

Легко проверить, что выражение (1.1) дает на линии  $x=0$  для прогиба  $w$ ,

угла наклона  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , изгибающего момента  $-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$  и обоб-

щенной поперечной силы  $-D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$  разрывы, величины которых соответственно равны:

$$\sum_1^{\infty} \delta_k \sin \lambda_k y, \quad \sum_1^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k y, \quad \sum_1^{\infty} m_k \sin \lambda_k y, \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} q_k \sin \lambda_k y.$$

Коэффициенты  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  и  $D_k$  определяются из условий, заданных на сторонах прямоугольника. Подходящим выбором коэффициентов  $\delta_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $m_k$  и  $q_k$  можно удовлетворить заданные условия на отрезке  $OA$ .

Для симметричной относительно оси  $ou$  задачи имеем:

$$C_k = D_k = 0, \quad \delta_k = m_k = 0.$$

Если при этом вдоль отрезка  $OA$  плита опирается на балку или на стенку, то надо дополнительно принять  $\alpha_k = 0$ . Если же вдоль отрезка  $OA$  имеется разрез, оба края которого свободны от опор, то коэффициенты  $q_k$  принимают заданные значения.

Для антисимметричной относительно оси  $ou$  задачи имеем

$$A_k = B_k = 0, \quad \alpha_k = q_k = 0.$$

Если при этом вдоль отрезка  $OA$  плита опирается на балку или на стенку, то надо дополнительно принять  $\delta_k = 0$ , а если вдоль отрезка  $OA$  имеется разрез, края которого свободны от опор, то коэффициенты  $m_k$  принимают заданные значения.

При несимметричных относительно  $ou$  условий вдоль отрезка  $OA$  (например, один край разреза заделан, а другой свободен от опор) решение задачи значительно усложняется.

2. В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной плиты, опертой по всему контуру и разрезанной вдоль отрезка  $OA = b$ , края которого свободны от опор.

Для простоты предполагаем, что внешняя нагрузка  $p$  зависит только от  $y$  и разлагается в ряде Фурье:

$$p = \sum_1^{\infty} a_k \sin \lambda_k y, \quad a_k = \frac{1}{b} \int_0^{2b} p \sin \lambda_k y dy. \quad (2.1)$$

Частное решение, удовлетворяющее условиям

$$f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = 2b,$$

будет

$$f(y) = \frac{16b^4}{\pi^4 D} \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{k^4} \sin \lambda_k y. \quad (2.2)$$

Для рассматриваемой задачи формула (1.1) принимает следующий вид

$$w = f(y) + \sum_1^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x) \sin \lambda_k y \pm \pm \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{4} [(1 + \sigma) \operatorname{sh} \lambda_k x + (1 - \sigma) \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x] \sin \lambda_k y. \quad (2.3)$$

Это выражение удовлетворяет условиям опирания на сторонах  $y = 0$  и  $y = 2b$ .

Подчинив (2.3) условиям опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = \pm a,$$

получим

$$A_k = - \frac{16 b^4 a_k}{\pi^4 k^4 \operatorname{ch} \lambda_k a} \left( 1 + \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{th} \lambda_k a \right) - a_k \left[ \frac{1 + \sigma}{4 \lambda_k} \operatorname{th} \lambda_k a + \frac{1 - \sigma}{4} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a} \right], \quad (2.4)$$

$$B_k = \frac{a_k}{2 \lambda_k^3 \operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{1 - \sigma}{4} a_k \operatorname{th} \lambda_k a.$$

Из условий симметрии вытекает, что на линии  $x = 0$  обобщенная поперечная сила равна нулю. Следовательно выражение (2.3) надо подчинить также следующим двум условиям:

а) условию равенства нулю изгибающего момента вдоль разреза

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } 0 \leq y \leq b. \quad (2.5)$$

б) условию непрерывности угла наклона  $\frac{\partial w}{\partial x}$  вдоль неразрезанной части линии  $x = 0$ . Это условие приводится к равенству

$$\sum_1^{\infty} a_k \sin \lambda_k y = 0, \quad \text{при } b \leq y \leq 2b. \quad (2.6)$$

Условия (2.5) и (2.6) равносильны соответственно следующим условиям

$$\int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \sin 2\lambda_n y dy = 0, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_b^{2b} \sin \lambda_k y \sin 2\lambda_n (y - b) dy = 0.$$

Из (2.7), с учетом (4) и (5), получим

$$a_{2n} = \frac{8n(-1)^n}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2 - 4n^2} a_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\sigma)n\pi}{8} \left[ (3+\sigma) \operatorname{th} 2\lambda_n a + 2(1-\sigma) \frac{\lambda_n a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_n a} \right] a_{2n} + \\ & + \frac{1-\sigma}{2} n(-1)^n \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k a_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[ (3+\sigma) \operatorname{th} \lambda_k a + (1-\sigma) \lambda_k \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a} \right]}{k^2 - 4n^2} \\ & = -\frac{a_{2n} b^3}{\pi^2 n^3} \left[ \frac{\sigma n}{4} - \frac{\sigma}{2 \operatorname{ch} 2\lambda_n a} + \frac{(1-\sigma) \pi a n^2 \operatorname{th} 2\lambda_n a}{4b \operatorname{ch} 2\lambda_n a} \right] - \\ & - \frac{16b^3 (-1)^n n}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2 (k^2 - 4n^2)} + \frac{32b^3 (-1)^n n}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_k}{k^2 \operatorname{ch} \lambda_k a} \times \\ & \times \left[ \frac{\sigma}{2} - (1-\sigma) \frac{k\pi a}{8b} \operatorname{th} \lambda_k a \right] \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2 - 4n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9) \end{aligned}$$

Исключив из (2.9) с помощью (2.8) коэффициенты  $a_{2n}$  и, для простоты, рассматривая случай равномерно распределенной нагрузки при которой

$$f(y) = \frac{p}{24D} y(y^3 - 4by^2 + 8b^3), \quad a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{4p}{\pi(2n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

получим относительно коэффициентов  $a_{2k+1}$  систему бесконечных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{2k+1}}{2k - 2n + 1} \mu(k, n) = \nu_n, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(k, n) = & \frac{1}{2k + 2n + 1} \left\{ 2n \left[ \operatorname{th} \frac{n\pi a}{b} + \frac{1-\sigma}{3+\sigma} \frac{n\pi a}{b \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{b}} \right] + \right. \\ & \left. + (2k+1) \left[ \operatorname{th} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} + \frac{1-\sigma}{2(3+\sigma)} \frac{\pi a}{b} \frac{2k+1}{\operatorname{ch}^2 \frac{(2k+1)\pi a}{2b}} \right] \right\}, \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_n = & \frac{2pb^3\sigma}{(1-\sigma)(3+\sigma)} \left\{ \frac{1}{2n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^4} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^3 (k^2 - 4n^2) \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b}} \left( \frac{k\pi a}{4b} \frac{1-\sigma}{\sigma} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{2b} - 1 \right) \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

В случае бесконечной полосы ( $a \rightarrow \infty$ ) из (2.10), с учетом (2.11) и (2.12), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{2k+1}}{2k - 2n + 1} = \frac{pb^3\sigma}{(1-\sigma)(3+\sigma)\pi} \left[ \frac{1}{2n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^4} \right]. \quad (2.13)$$

Эти уравнения можно привести к регулярному виду. Для этого надо предварительно исключить из них коэффициент  $\alpha_1$ , а затем применить способ, указанный в (2).

Заметим, что при  $\sigma = 0$  из (2.13) и (2.8) получим  $\alpha_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Далее из (2.4) имеем  $A_k = B_k = 0$ . Тогда формула (2.3) даст  $\omega = f(y)$ , что можно было бы предвидеть, не решая задачу.

При  $b \rightarrow \infty$  из (2.10) и (2.8) получим  $\alpha_k \rightarrow \infty$ , вследствие чего прогибы стремятся к бесконечности, что вполне закономерно, так как при этом рассматриваемая система становится геометрически изменяемой.

Можно показать, что кроме последнего случая для всех остальных значений параметра  $a:b$  система (2.10), начиная с некоторого значения натурального числа  $n \geq 1$ , приводится к регулярному виду, причем свободные члены приведенной системы будут относительно числа  $n$  порядка не ниже чем  $\frac{1}{n^2}$ .

Таким образом рассматриваемая задача теоретически решена. Для получения числовых результатов надо пользоваться методами решения бесконечных систем уравнений (2).

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ

**Ուղղանկյուն բարակ սալի ծոման մի դեպքի մասին**

Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալի (զծ. 1) ծոմամբ, երբ դա ազատ հենված է  $y = 0$  և  $y = 2b$  կողմերով և ունի ցանկացած ամրացումներ  $x = \pm a$  կողմերում, իսկ  $OA$  հատվածի վրա տրված են հնարավոր ամրացման պայմաններ: Խնդիրը լուծված է լրացուցիչ ազդեցությունների մեթոդով (1): Լուծումը կառուցված է այնպես, որ  $x = 0$  ուղղի վրա խզման և նեխարկվում ճկվածքը, սալի ուղղածիգ էլեմենտի պտտման անկյունը  $Oy$  առանցքի նկատմամբ, ծող մոմենտը նույն առանցքի նկատմամբ և ընդհանրացած կտրոց ուժի խզման մեծությունների պարամետրերի հարմար ընտրության միջոցով հնարավոր է լինում բավարարել ամրացման պայմանները  $OA$  հատվածի վրա:

Որպես օրինակ դիտարկված է եզրագծով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի ծոման խնդիրը, երբ  $OA = b$  հատվածի երկայնքով սալը ճեղքված է, որի եզրերն ազատ են հնարաններից: Պարզության համար դիտարկված է հավասարաչափ բաշխված բևոի դեպքը: Խզման մեծություններից դրոյից տարբեր է միայն պտտման անկյունը, որի պարամետրերի նկատմամբ ստացվել է անվերջ հավասարումների սխեմ: Այդ սխեմը կարելի է բերել ուղղակյար տեսքի:

**ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> О. М. Сапонджян, ПММ, т. XIII, в. 5, 1949. <sup>2</sup> Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Госиздат ТТЛ, Л.—М., 1952.