ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

К решению задачи изгиба анизотропных (неортотропных) пластин

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18/IV 1963)

Здесь предлагается способ решения задачи изгиба неортотропных пластин, когда в каждой точке пластинки имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости.

Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ, зависящего от упругих постоянных анизотропной (неортотропной) пластинки и обращающегося в нуль в случае ортотропного материала.

1. Задача о нахождении прогибов неортотропных пластинок, изгибающихся под действием перпендикулярных к ее плоскости сил, сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными с неразделяющимися переменными ([1])*

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \tag{1.1}$$

при определенных граничных условиях.

Произведя преобразования

$$x = \sqrt[4]{D_{11}}\,\alpha, \quad y = \sqrt[4]{D_{22}}\,\beta, \quad w(x, y) = \Psi(\alpha, \beta), \quad q(x, y) = q_0(\alpha, \beta), \tag{1.2}$$

из (1.1) придем к следующему дифференциальному уравнению для прогиба $\Psi(\alpha, \beta)$:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} + 4\mu K_2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + 2K \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 4\mu' K_1 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta^3} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \beta^4} = q_0(\alpha, \beta),$$

или

* Здесь и в дальнейшем приняты общепринятые обозначения.

$$\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^4}+2K\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4\Psi}{\partial\beta^4}+4\mu\left[K_1\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^3\partial\beta}+K_2\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha\partial\beta^3}\right]=q_0(\alpha,\ \beta), \tag{1.3}$$

где

$$\mu=\frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}D_{66}}}<1,\qquad \mu'=\frac{D_{26}}{\sqrt{D_{22}D_{66}}}<1,\qquad \mu'=\mu\lambda,$$

$$K_1=\frac{\sqrt{D_{66}}}{\sqrt[4]{D_{11}D_{22}}},\qquad K_2=\lambda K_1,\qquad K=\frac{D_{12}+2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}.$$

Здесь легко заметить, что для ортотропной пластинки $\mu=0$ и $\mu'=0$.

Решение дифференциального уравнения (1.3) представим в виде ряда по степеням малого параметра μ:

$$\Psi(\alpha,\ \beta)=w_0(\alpha,\ \beta)+\sum_{m=1}^{\infty}w_m(\alpha,\ \beta)\mu^m. \tag{1.4}$$

Подставляя значения $\Psi(\alpha,\ \beta)$ из (1.4) в (1.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, находим

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial\alpha^4}+2K\frac{\partial^4 w_0}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial\beta^4}=q_0(\alpha,\ \beta), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^4 w_m}{\partial\alpha^4}+2K\frac{\partial^4 w_m}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4 w_m}{\partial\beta^4}=q_m(\alpha,\ \beta)\quad (m=1,\ 2,\cdots), \tag{1.6}$$

где

$$q_m(\alpha,\ \beta)=-4\left[K_1\frac{\partial^4 w_{m-1}}{\partial\alpha^3\partial\beta}+K_2\frac{\partial^4 w_{m-1}}{\partial\alpha\partial\beta^3}\right]\quad (m=1,\ 2,\cdots). \tag{1.7}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.3) сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.5) и (1.6) при определенных граничных условиях ([1]).

2. Рассмотрим задачу об изгибе неортотропной прямоугольной пластинки с опертыми сторонами.

Пусть прямоугольная пластинка оперта (шарнирно закреплена) по всем четырем сторонам и изгибается нормальной нагрузкой, распределенной по закону $q(x,\ y)=\bar{q}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$. Оси x и y направим вдоль сторон a и b.

Граничными условиями рассматриваемой задачи будут ([1])

$$\left.\begin{aligned}
&w=0,\quad M_x=-\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0\\
&\qquad\qquad\text{для } x=0,\quad x=a,\\
&w=0,\quad M_y=-\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0\\
&\qquad\qquad\text{для } y=0,\quad y=b.
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Пользуясь формулами преобразований (1.2), выражением (1.4) и затем, что поскольку по краям $w=0$, то по соответствующим краям пластинки справедливы $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}=0$ и $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}=0$. Следовательно граничные условия (2.1) примут вид

$$w_m = 0 \quad (m=0, 1, 2,\cdots), \qquad \frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 w_m}{\partial\alpha^2}=-2K_1\frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$(m=1, 2,\cdots) \quad \text{при} \quad \alpha=0 \text{ и } \alpha=a_1,$$

$$w_m = 0 \quad (m=0, 1, 2,\cdots), \qquad \frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 w_m}{\partial\beta^2}=-2K_2\frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$(m=1, 2,\cdots) \quad \text{при} \quad \beta=0 \text{ и } \beta=b_1, \tag{2.2}$$

где

$$a_1=\frac{a}{\sqrt[4]{D_{11}}} \quad \text{и} \quad b_1=\frac{b}{\sqrt[4]{D_{22}}}.$$

Таким образом, для определения функции $\Psi(\alpha, \beta)$ нужно решить уравнения (1.5) и (1.6) при условиях (2.2).

Решение уравнения (1.5) представим в виде

$$w_0(\alpha, \beta)=C\sin\frac{\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{\pi\beta}{b_1}, \tag{2.3}$$

здесь C — пока неизвестная постоянная величина.

Очевидно, что для $w_0(\alpha, \beta)$ все граничные условия (2.2) удовлетворены. Из дифференциального уравнения (1.5) при помощи (2.3) определяется постоянная C. Следовательно, для $w_0(\alpha, \beta)$ имеем

$$w_0(\alpha, \beta)=\frac{\widetilde{q}}{\left(\frac{1}{a_1^4}+\frac{2K}{a_1^2 b_1^2}+\frac{1}{b_1^4}\right)\pi^4}\sin\frac{\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{\pi\beta}{b_1}, \tag{2.4}$$

что является первым приближением решения.

Второе приближение строим следующим образом. Подставляя выражения $w_0(\alpha, \beta)$ из (2.4) в (1.6) и учитывая (1.7), получим

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial\alpha^4}+2K\frac{\partial^4 w_1}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4 w_1}{\partial\beta^4}=\widetilde{q}_1\cos\frac{\pi\alpha}{a_1}\cos\frac{\pi\beta}{b_1}, \tag{2.5}$$

где

$$\widetilde{q}_1=\frac{4C\pi^4}{a_1 b_1}\left(\frac{K_1}{a_1^2}+\frac{K_2}{b_1^2}\right), \qquad C=\frac{\widetilde{q}}{\left(\frac{1}{a_1^4}+\frac{2K}{a_1^2 b_1^2}+\frac{1}{b_1^4}\right)\pi^4}. \tag{2.6}$$

Из (2.2), учитывая (2.4), для $w_1(\alpha, \beta)$ будем иметь следующие граничные условия

$$\left.\begin{aligned} &w_1=0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha^2}=-f(\beta) \quad \text{при} \quad \alpha=0, \\ &w_1=0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha^2}=f(\beta) \quad \text{при} \quad \alpha=a_1, \end{aligned}\right\}, \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_1=0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\beta^2}=-\varphi(\alpha) \quad \text{при} \quad \beta=0, \\ &w_1=0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\beta^2}=\varphi(\alpha) \quad \text{при} \quad \beta=b_1, \end{aligned}\right\}, \tag{2.8}$$

где

$$f(\beta)=2CK_1\frac{\pi^2}{a_1b_1}\cos\frac{\pi\beta}{b_1}, \qquad \varphi(\alpha)=2CK_2\frac{\pi^2}{a_1b_1}\cos\frac{\pi\alpha}{a_1}, \tag{2.9}$$

Решение дифференциального уравнения (2.5) при условиях (2.7) и (2.8) можно представить в виде

$$w_1(\alpha,\beta)=\sum_{n=2,4}^{\infty}\left[A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi s_1\alpha}{b_1}+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi s_1\alpha}{b_1}+C_n\operatorname{ch}\frac{n\pi s_2\alpha}{b_1}+D_n\operatorname{sh}\frac{n\pi s_2\alpha}{b_1}+\right.$$

$$\left.+d_n\cos\frac{\pi\alpha}{a_1}\right]\sin\frac{n\pi\beta}{b_1}+\sum_{m=2,4}^{\infty}\left[\bar{A}_m\operatorname{ch}\frac{m\pi s_1\beta}{a_1}+\bar{B}_m\operatorname{sh}\frac{m\pi s_1\beta}{a_1}+\right.$$

$$\left.+\bar{C}_m\operatorname{ch}\frac{m\pi s_2\beta}{a_1}+\bar{D}_m\operatorname{sh}\frac{m\pi s_2\beta}{a_1}+g_m\cos\frac{\pi\beta}{b_1}\right]\sin\frac{m\pi\alpha}{a_1}. \tag{2.10}$$

Здесь

$$A_n=\frac{d_ns_2^2+R_n}{s_1^2-s_2^2},$$

$$B_n=\frac{R_n\left(2\operatorname{ch}\frac{n\pi s_2a_1}{b_1}-\operatorname{ch}\frac{n\pi s_1a_1}{b_1}-1\right)-d_n\left(s_2^2+s_1^2\operatorname{ch}\frac{n\pi s_1a_1}{b_1}\right)}{(s_1^2-s_2^2)\operatorname{sh}\frac{n\pi s_1a_1}{b_1}},$$

$$C_n=\frac{-d_ns_1^2-R_n}{s_1^2-s_2^2}, \quad D_n=\frac{R_n\left(\operatorname{ch}\frac{n\pi s_2a_1}{b_1}-1\right)-d_ns_1^2\left(1+\operatorname{ch}\frac{n\pi s_2a_1}{b_1}\right)}{(s_2^2-s_1^2)\operatorname{sh}\frac{n\pi s_2a_1}{b_1}},$$

$$\bar{A}_m=\frac{g_ms_2^2+L_m}{s_1^2-s_2^2},$$

$$\bar{B}_m=\frac{L_m\left(2\operatorname{ch}\frac{m\pi s_2b_1}{a_1}-\operatorname{ch}\frac{m\pi s_1b_1}{a_1}-1\right)-g_m\left(s_2^2+s_1^2\operatorname{ch}\frac{m\pi s_1b_1}{a_1}\right)}{(s_1^2-s_2^2)\operatorname{sh}\frac{m\pi s_1b_1}{a_1}},$$

$$\overline{C}_m=\frac{-g_m s_1^2-L_m}{s_1^2-s_2^2},\quad \overline{D}_m=\frac{L_m\left(\operatorname{ch}\frac{m\pi s_2 b_1}{a_1}-1\right)-g_m s_1^2\left(1+\operatorname{ch}\frac{m\pi s_2 b_1}{a_1}\right)}{(s_2^2-s_1^2)\operatorname{sh}\frac{m\pi s_2 a_1}{b_1}},$$

$$d_n=-\frac{4\widetilde{q}_1^{(1)}}{\pi^5\left[\frac{1}{a_1^4}+\frac{2Kn^2}{a_1^2 b_1^2}+\frac{n^4}{b_1^4}\right]}\frac{n}{1-n^2},\quad R_n=\left[d_n\left(\frac{\pi}{a_1}\right)^2-F_n\right]\frac{b_1^2}{n^2\pi^2},$$

$$F_n=-\frac{8CK_1\pi}{a_1 b_1}\frac{n}{1-n^2},\quad g_m=-\frac{4\widetilde{q}_1^{(2)}}{\pi^5\left[\frac{1}{b_1^4}+\frac{2Km^2}{a_1^2 b_1^2}+\frac{m^4}{a_1^4}\right]}\frac{m}{1-m^2},$$

$$L_m=\left[g_m\left(\frac{\pi}{b_1}\right)^2-G_m\right]\frac{a_1^2}{m^2\pi^2},\quad G_m=-\frac{8CK_2\pi}{a_1 b_1}\frac{m}{1-m^2},\quad \widetilde{q}_1=\widetilde{q}_1^{(1)}+\widetilde{q}_1^{(2)},$$

а s_1 и s_2 корни характеристического уравнения

$$s^4-2Ks^2+1=0. \tag{2.11}$$

В зависимости от значения $K\left(K=\frac{D_{12}+2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{12}}}\right)$ возможны три случая для корней этого уравнения.

Случай I. Корни уравнения (2.11) вещественные, неравные:

$$\pm s_1,\ \pm s_2\ (s_1>0,\ s_2>0).$$

Случай II. Корни уравнения (2.11) вещественные, равные попарно:

$$\pm s\quad (s>0).$$

Случай III. Корни уравнения (2.11) комплексные:

$$s\pm ti,\quad -s\pm ti\quad (s>0,\ t>0).$$

Мы ограничивались лишь рассматриванием случая I; так как решения для остальных определяются путем предельного перехода при $s_1=s_2=s$, либо путем отделения вещественной части комплексного выражения, которое получается, если положить $s_1=s+ti$, $s_2=s-ti$.

Таким образом, имея $w_1(\alpha,\beta)$, при помощи (1.6) и (2.2), аналогично, можно построить решения и в последующих приближениях. Имея выражения для прогиба, при помощи известных формул ([1]) можно определить моменты и перерезывающие силы.

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, учитывая (1.4), (3.4) и (2.10), для прогиба $\Psi(\alpha,\beta)$ получим следующее выражение

$$
\Psi(\alpha, \beta) = \frac{\tilde{q} \sin \frac{\pi\alpha}{a_1} \sin \frac{\pi\beta}{b_1}}{\pi^4 \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{2K}{a_1^2 b_1^2} + \frac{1}{b_1^4} \right)} + \mu \sum_{n=2,4}^{\infty} \left\{ \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 \alpha}{b_1} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s_1 \alpha}{b_1} + \right. \right.
$$

$$
\left. + C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s_2 \alpha}{b_1} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s_2 \alpha}{b_1} + d_n \cos \frac{\pi\alpha}{a_1} \right] \sin \frac{n\pi\beta}{b_1} +
$$

$$
+ \left[\bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 \beta}{a_1} + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s_1 \beta}{a_1} + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 \beta}{a_1} + \right.
$$

$$
\left. \left. + \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi s_2 \beta}{a_1} + g_n \cos \frac{\pi\beta}{b_1} \right] \sin \frac{n\pi\alpha}{a_1} \right\}
$$

или, принимая во внимание (1.2), для $w(x, y)$ находим

$$
w(x, y) = \frac{\tilde{q} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\pi^4 \left[\frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right]} +
$$

$$
+ \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11} D_{66}}} \sum_{n=2,4}^{\infty} \left\{ \left[A_n \operatorname{ch} \frac{\pi s_1 n x}{b} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} + B_n \operatorname{sh} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \frac{n\pi s_1 x}{b} + \right. \right.
$$

$$
\left. + C_n \operatorname{ch} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \frac{n\pi s_2 x}{b} + D_n \operatorname{sh} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \frac{n\pi s_2 x}{b} + d_n \cos \frac{\pi x}{a} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} +
$$

$$
+ \left[\bar{A}_n \operatorname{ch} \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \frac{n\pi s_1 y}{a} + \bar{B}_n \operatorname{sh} \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \frac{n\pi s_1 y}{a} + \bar{C}_n \operatorname{ch} \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \frac{n\pi s_2 y}{a} + \right.
$$

$$
\left. \left. + \bar{D}_n \operatorname{sh} \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \frac{n\pi s_2 y}{a} + g_n \cos \frac{\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi n x}{a} \right\}. \tag{2.12}
$$

Наконец отметим, что этим методом можно решить уравнение (1.1) при разных граничных условиях.

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) սալերի ծռման խնդրի լուծման մասին

Առաջարկված է ոչ օրթոտրոպ սալերի ծռման խնդրի լուծման եղանակ։

Լուծումը ներկայացված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր), որը օրթոտրոպ նյութի համար հավասար է զրոյի։

Այդ եղանակով չանջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով չորրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով ռեկուրենտ դիֆերենցիալ հավասարման լուծման։

Որպես կիրառություն լուծված է անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) ազատ հենված ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Лехницкий.* Анизотропные пластинки. Гос. издат. тех.-теорет. лит. М., 1957.