ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян

Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 16/III 1963)

Плоская контактная задача теории упругости была рассмотрена в работах Н. И. Мусхалишвили ([1-3]), И. Я. Штаермана ([4]), Л. А. Галина ([5-6]), Д. И. Шермана ([7]), Н. М. Бородачева ([8]) и других. Подробный обзор о плоских контактных задачах сделан в докладе Д. И. Шермана ([9]).

В настоящей работе получено решение задачи о давлении жесткого штампа, приложенного на части кромки упругой изотропной четверть-плоскости в предположении отсутствия трения. Задача решается методом Фурье. Решение представлено в виде интегралов Фурье. Определение коэффициентов интегрирования сведено к решению системы „тройных" интегральных уравнений ([10]) и интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Причем решение системы „тройных" интегральных уравнений сводится к определению коэффициентов дуальных тригонометрических рядов ([11-12]).

§ 1. *Постановка задачи*. Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа нормальной силой P на прямолинейную границу упругой четверть-плоскости (фиг. 1). Как известно ([13]), в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$, которая может быть представлена в виде:

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty [C(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta. \tag{1.1}$$

Здесь $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\beta)$ и $D(\beta)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий при $x=0$ и $y=0$. Используя обычные формулы для напряжений и перемещений, будем иметь

$$\sigma_x = -\int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta,$$

$$\sigma_y = \int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) + D(\beta) \beta y] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta,$$

$$\tau_{xy} = \int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta,$$

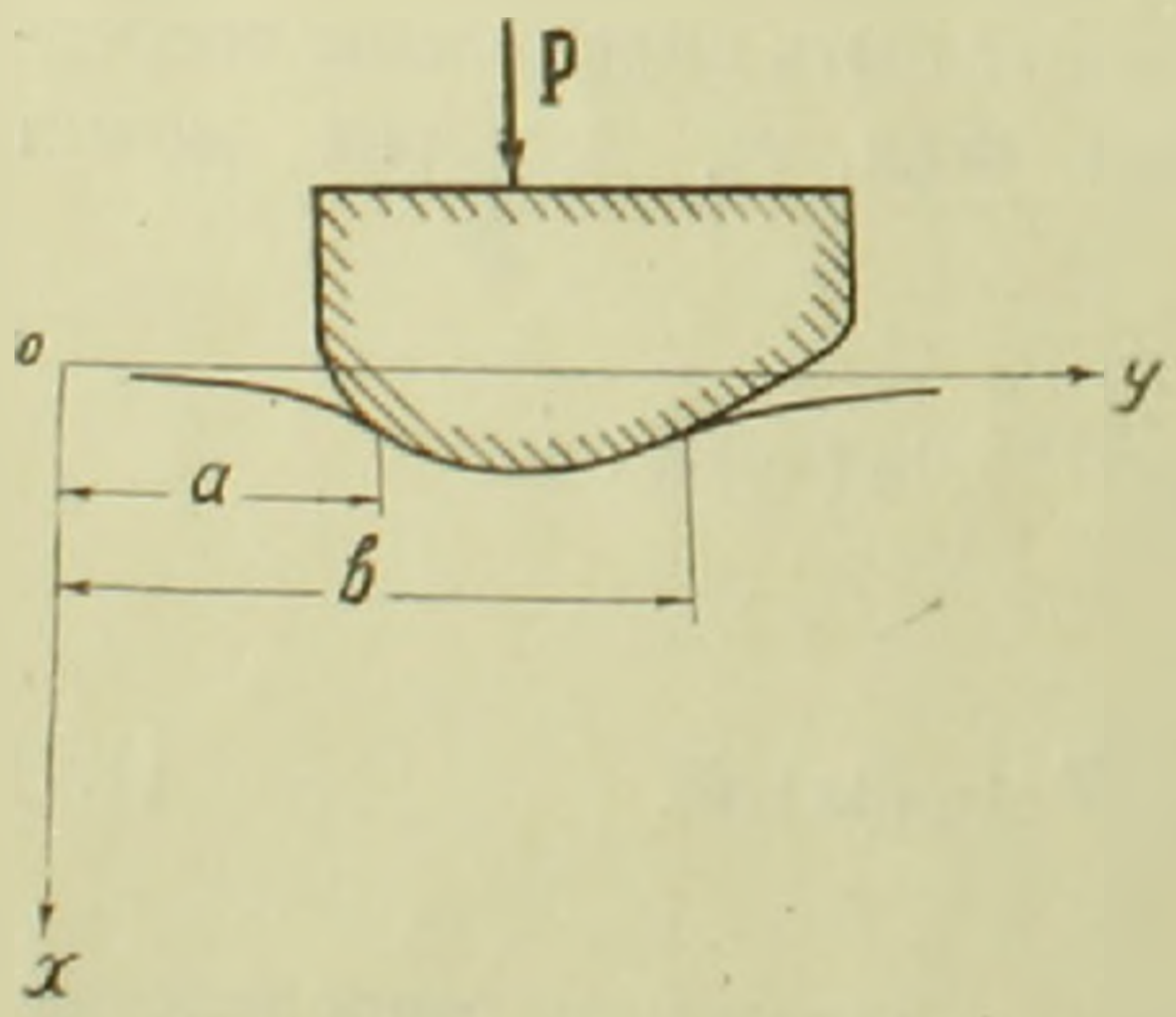
$$u = \frac{1}{E} \int_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) + (1-\nu) B(\alpha) + (1+\nu) \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \frac{1}{E} \int_0^\infty \beta [(1+\nu) C(\beta) - 2D(\beta) + (1+\nu) \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta - a_0 y + b_0$$

$$v = -\frac{1}{E} \int_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) - 2B(\alpha) + (1+\nu) \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{E} \int_0^\infty \beta [(1+\nu) C(\beta) + (1-\nu) D(\beta) + (1+\nu) \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta +$$

$$+ a_0 x + c_0, \tag{1.2}$$



Фиг. 1

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Граничные условия в данном случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\sigma_x(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < a \\ &u(0, y) = f(y) \quad \text{при} \quad a < y < b \\ &\sigma_x(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad y > b \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < \infty \\ &\left.\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = 0 \\ \tau_{xy}(x, 0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (0 < x < \infty). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Так как при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$

должны стремиться к нулю, то следует в формулах (1.2) положить $a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

Учитывая это и удовлетворяя условиям (1.3) и (1.4), получим

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \sin(\alpha y)\, d\alpha = 0 \qquad (0 < y < a)$$

$$\int_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) + (1-\nu) B(\alpha)] \sin(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta [(1+\nu) C(\beta) - 2D(\beta) + (1+\nu) \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} d\beta = Ef(y) \quad (a < y < b) \tag{1.5}$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \sin(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad (y > b)$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha)] \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} d\beta = 0 \quad (0 < y < \infty)$$

$$\int_0^\infty \beta^2 C(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = 0 \quad (0 < x < \infty) \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) - D(\beta)] \cos(\beta x)\, d\beta = 0 \quad (0 < x < \infty).$$

Используя формулу обращения Фурье, из (1,6) получим

$$C(\beta) = 0,$$

$$A(\alpha) - B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta^3 D(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta, \tag{1.7}$$

$$\beta^2 D(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha^3 \left[\frac{A(\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{2\beta^2 B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] d\alpha. \tag{1.8}$$

Подставив значение $B(\alpha)$ из (1.7) в (1.8), получим

$$\beta^2 D(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^3(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} A(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \frac{16\beta^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\gamma^3 D(\gamma)}{(\beta^2-\gamma^2)^3}\left[\ln\frac{\beta}{\gamma}(\beta^2+\gamma^2)-(\beta^2-\gamma^2)\right] d\gamma. \qquad (1.9)$$

Подставляя (1.7) в (1.5), для определения $A^*(\alpha)$ получим систему „тройных“ интегральных уравнений

$$\begin{gathered}
\int_0^\infty A^*(\alpha)\sin(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad (0 < y < a), \\
\int_0^\infty \frac{A^*(\alpha)\sin(\alpha y)\, d\alpha}{\alpha} = F(y) \quad (a < y < b), \\
\int_0^\infty A^*(\alpha)\sin(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad (y > b),
\end{gathered} \qquad (1.10)$$

где использованы обозначения

$$A^*(\alpha) = \alpha^2 A(\alpha); \qquad F(y) = \frac{E}{2} f(y) + \int_0^\infty [y\gamma^2 - \gamma]\, e^{-y\gamma} D(\gamma)\, d\gamma. \quad (1.11)$$

Задача о распределении напряжений $\sigma_x(0, y)$, возникающих в упругой четверть плоскости под штампом, будет решена, если будут определены функции $A^*(\alpha)$ и $D(\beta)$ из „тройных“ интегральных уравнений ([10]) (1.10) и из уравнения (1.9).

§ 2. *Определение функции* $A^*(\alpha)$. Имея в виду, что ([14])

$$\int_0^\infty J_{2n-1}(b\alpha)\sin(y\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sin[(2n-1)\arcsin(y/b)]}{\sqrt{b^2-y^2}} & (y < b) \\ 0 & (y > b) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n-1}(b\alpha)\sin(y\alpha)\, d\alpha}{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\arcsin(y/b)] & (y \leqslant b) \\ \dfrac{b^{2n-1}(-1)^{n+1}}{(2n-1)\left(y+\sqrt{y^2-b^2}\right)^{2n-1}} & (y \geqslant b) \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $J_i(x)$ функция Бесселя i-го порядка первого рода с действительным аргументом, функцию $A^*(\alpha)$ ищем в виде

$$A^*(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty A_n^* J_{2n-1}(b\alpha). \qquad (2.2)$$

Здесь A_n^* неизвестные пока коэффициенты, подлежащие определению.

Тогда третье уравнение (1.10) удовлетворяет тождественно. Из остальных двух уравнений после изменения порядка интегрирования и суммирования получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2} \theta = \varphi(\theta) \quad (0 < \theta < \lambda)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2n-1}{2} \theta = 0 \qquad (\lambda < \theta < \pi) \tag{2.3}$$

где

$$A_n = (-1)^{n+1} A_n^{*}.$$

$$\varphi(\theta) = F[b\cos(\theta/2)] = \frac{E}{2} f[b\cos(\theta/2)] +$$

$$+ \int_0^{\infty} [b\cos(\theta/2)\gamma^2 - \gamma] e^{-b\gamma\cos(\theta/2)} D(\gamma)\, d\gamma \tag{2.4}$$

и использованы обозначения

$$y = b\cos(\theta/2); \quad a = b\cos(\lambda/2). \tag{2,5}$$

Такие дуальные тригонометрические ряды рассматривались в работах К. Трантера ([11]) и В. Ф. Шеферда ([12]). Используя результаты К. Трантера, получаем

$$A_n = 2\xi(0)\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) +$$

$$+ 4n(1-n)\sin^3\left(\frac{\lambda}{2}\right) \int_0^1 s\xi(s) F\left(n+1, -n; 2; s^2 \sin^2\frac{\lambda}{2}\right) ds, \tag{2.5*}$$

где

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi} \int_0^s \frac{\mu\varphi'\left\{2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}}{\sqrt{s^2-\mu^2}} d\mu + C. \tag{2.6}$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд, C — постоянная.

Постоянная C может быть найдена путем подстановки (2.5*) и (2.6) в первое уравнение (2.3). Таким образом коэффициенты A_n^{*} определяются из уравнений (2.4), (2.5*) и (2.6), а функция $A(\alpha)$ — из (2.2), (1.11) и выражается через $D(\beta)$.

§ 3. *Определение функции* $D(\beta)$. Из (1.1), (2.2) и (2.4) имеем

$$\alpha^2 A(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n J_{2n-1}(b\alpha). \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.9) и имея в виду ([11]), что

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} J_{2n-1}(b\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^n (b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\Big[(2n+1)\,{}_1F_2\Big(\frac{2n+3}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)-$$

$$-(2n-1)\,{}_1F_2\Big(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2n-1}\Big[{}_1F_2\Big(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{3};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)-$$

$$-\frac{(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\Big(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{5};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)\Big], \qquad (3.2)$$

где ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p;\ \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q;\ z)$ — обобщенный гипергеометрический ряд, получим

$$\beta^2 D(\beta) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}A_n\Big\{\frac{\pi}{4}\frac{(-1)^n (b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\Big[(2n+1)\,{}_1F_2\times$$

$$\times\Big(\frac{2n+3}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)-$$

$$-(2n-1)\,{}_1F_2\Big(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2n-1}\Big[{}_1F_2\Big(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)-$$

$$-\frac{(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\Big(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\Big)\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{16\beta^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\gamma^3 D(\gamma)}{(\beta^2-\gamma^2)^3}\Big[(\beta^2+\gamma^2)\ln\frac{\beta}{\gamma}-(\beta^2-\gamma^2)\Big]d\gamma. \qquad (3.3)$$

Согласно (2.4) имеем

$$\varphi'(\theta) = -\frac{Eb}{4}\sin(\theta/2)f'\Big(b\cos\frac{\theta}{2}\Big)+$$

$$+\int_0^\infty \frac{b\gamma^2}{2}\sin(\theta/2)\,[b\gamma\cos(\theta/2)-2]\,e^{-b\gamma\cos(\theta/2)}D(\gamma)\,d\gamma. \qquad (3.4)$$

Следовательно

$$\varphi'\Big\{2\arcsin\Big(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\Big)\Big\} = -\frac{Eb}{4}\mu\sin\frac{\lambda}{2}f'\Big(b\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\Big)+$$

$$+\frac{b\mu}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty \mu\left(b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}-2\right)e^{-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}D(\gamma)\,d\gamma. \quad (3.5)$$

С учетом (3.5) перепишем (2.6) в виде

$$\xi(s)=-\frac{Eb}{\pi}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^s\frac{\mu^2 f'\left(b\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right)}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu+$$

$$+\frac{2b}{\pi}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty\gamma^2 D(\gamma)\times$$

$$\times\left[\int_0^s\frac{\mu^2\left(b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}-2\right)e^{-b\gamma\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu\right]d\gamma+C. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.6) и подставляя (2.5*) в (3.3), для определения функции $D(\beta)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\Psi(\beta)=g(\beta)+\int_0^\infty K(\beta,\gamma)\Psi(\gamma)\,d\gamma, \quad (3.7)$$

где введены обозначения

$$\Psi(\beta)=\beta^2 D(\beta) \quad (3.8)$$

$$g(\beta)=\sin\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^\infty\left\{\frac{(b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\left[(2n-1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-(2n+1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+3}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2b^2}{4}\right)\right]+$$

$$+\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}\left[{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{C\left[1+n(1-n)\sin^2\frac{\lambda}{2}\,{}_3F_2\left(1,\ 1+n,\ -n;\ 2,\ 2;\ \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{2Eb}{\pi}n(n-1)\sin^3\frac{\lambda}{2}\times$$

$$\times \int_0^1 \left[sF\left(n+1, \; -n; \; 2; \; s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) \int_0^s \frac{\mu^2 f'\left(b\sqrt{1-\mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}\right)}{\sqrt{s^2-\mu^2}} d\mu \right] ds \Bigg\}. \tag{3.9}$$

$$K(\beta, \gamma) = I_1(\beta, \gamma) + I_2(\beta, \gamma), \tag{3.10}$$

где

$$I_1(\beta, \gamma) = \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{\gamma\beta^2(\beta^2+\gamma^2)}{(\beta^2-\gamma^2)^3} \ln \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma\beta^2}{(\beta^2-\gamma^2)^2} \right], \tag{3.11}$$

$$I_2(\beta, \gamma) = \frac{16\,b}{\pi^2} \sin^4 \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-n) \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{(b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!} \times \right.$$

$$\times \left[(2n-1)\, {}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2}; \; \frac{2n-1}{2}, \; 2n; \; \frac{b^2\beta^2}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - (2n+1)\, {}_1F_2\left(\frac{2n+3}{2}; \; \frac{2n+1}{2}, \; 2n; \; \frac{b^2\beta^2}{4}\right) \right] +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \left[{}_1F_2\left(2; \; \frac{2n+1}{2}, \; -\frac{2n-3}{2}; \; \frac{b^2\beta^2}{4}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\, {}_1F_2\left(2; \; \frac{2n+3}{2}, \; -\frac{2n-5}{2}; \; \frac{b^2\beta^2}{4}\right) \right] \right\} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[sF\left(n+1, \; -n; \; 2; \; s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^s \frac{\mu^2 \left(b\gamma\sqrt{1-\mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}} - 2\right) e^{-b\gamma\sqrt{1-\mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}}}{\sqrt{s^2-\mu^2}} d\mu \right] ds. \tag{3.12}$$

Для решения уравнения (3.7) сперва докажем, что

$$\int_0^{\infty} |K(\beta, \gamma)|\, d\gamma < 1. \tag{3.13}$$

Действительно, из (3.10)

$$\int_0^{\infty} |K(\beta, \gamma)|\, d\gamma < \int_0^{\infty} I_1(\beta, \gamma)\, d\gamma + \int_0^{\infty} I_2(\beta, \gamma)\, d\gamma.$$

Произведя интегрирование, получим

$$\int_0^{\infty} I_1(\beta, \gamma)\, d\gamma = \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{(x+1)\ln x}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} \right] dx =$$

$$
=\frac{8}{\pi^2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{\ln x}{x-1}-\frac{\ln x}{(x-1)^2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{8}{\pi^2}\,\frac{1}{2}=\frac{4}{\pi^2}. \tag{3.14}
$$

$$
\int_0^\infty I_2(\beta,\ \gamma)\,d\gamma \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4}\left\{\frac{n(1-n)(b\beta/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\times\right.
$$

$$
\times\left[(2n-1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+1}{2};\ \frac{2n-1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)-\right.
$$

$$
\left.-(2n+1)\,{}_1F_2\left(\frac{2n+3}{2};\ \frac{2n+1}{2},\ 2n;\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right]+
$$

$$
+\frac{(-1)^{n+1}\pi}{4}\left[{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+1}{2},\ -\frac{2n-3}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)-\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{(b\beta)^2}{(2n+1)(2n-3)}\,{}_1F_2\left(2;\ \frac{2n+3}{2},\ -\frac{2n-5}{2};\ \frac{b^2\beta^2}{4}\right)\right]\right\}<
$$

$$
<\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}. \tag{3.15}
$$

Следовательно

$$
\int_0^\infty |K(\beta,\ \gamma)|\,d\gamma<\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}<1, \tag{3.16}
$$

и функция $g(\beta)$ ограничена.

Решая (3.7) методом последовательных приближений и пользуясь (3.8), получаем выражение функции $D(\beta)$. Подставляя полученное выражение для $D(\beta)$ в (2.5*), найдем выражение для коэффициентов A_n. Подставляя далее последнее выражение в (3.1), определим $A(\alpha)$, а пользуясь соотношением (1.7), также и $B(\alpha)$. Определив $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ и $D(\beta)$, по формулам (1.2) определим компоненты деформаций и напряжений.

Если вместо (1.4) возьмем граничные условия в виде

$$
\left.\begin{aligned} u(x,\ 0)&=0\\ \sigma_y(x,\ 0)&=0\end{aligned}\right\}\quad (0<x<\infty) \tag{3.17}
$$

$$
\tau_{xy}(0,\ y)=0\quad (0<y<\infty),
$$

то получим

$$
C(\beta)=D(\beta)=0 \tag{3.18}
$$

$$
A(\alpha)=B(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}A_nJ_{2n-1}(b\alpha),
$$

где

$$
A_n=2\sin\frac{\lambda}{2}\,\xi(1)\,F\left(n,\ 1-n;\ 1;\ \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)-
$$

$$- 2 \sin \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \xi'(s) F\left(n, 1-n; 1; s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) ds, \tag{3.19}$$

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi} \int_0^s \frac{\mu \varphi' \left\{2 \arcsin \left(\mu \sin \frac{\lambda}{2}\right)\right\}}{\sqrt{s^2 - \mu^2}} d\mu + C, \tag{3.20}$$

$$\varphi(\theta) = \frac{E}{2} f\left(b \cos \frac{\theta}{2}\right), \tag{3.21}$$

то есть решение получим в замкнутом виде. Этим же методом можно решить плоскую контакную задачу для упругого тела конечной ширины.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

Առաձգական քառորդ հարթության կոնտակտային մի խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգական քառորդ հարթության եզրագծի վրա շտամպի ճնշման խնդրի լուծումը, այն ենթադրությամբ, որ շփումը բացակայում է։ Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով։ Լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով։ Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է «երկրական» ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի (10) և Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Ընդ որում «երկրական» ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվում է զույգ եռանկյունաչափական շարքերից կազմված հավասարումների լուծմանը (11—12)։

ЛИТЕРАТУРА ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М., 1954. 2. *Н. И. Мусхелишвили*, ДАН СССР, т. VII, № 2 (1953), 51—54. 3. *Н. И. Мусхелишвили*, Сообщения АН ГрузССР, т. 2, № 10 (1941). 4. *И. Я. Штаерман*, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат. М.-Л., 1949. 5. *Л. А. Галин*, Контактные задачи теории упругости, ГИТТЛ, М., 1953. 6. *Л. А. Галин*, ДАН СССР, т. 39, № 3 (1943), 88—93. 7. *Д. И. Шерман*, Труды сейсмологического ин-та АН СССР, № 88, 1938. 8. *Н. М. Бородачев*, Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1962, 170—172. 9. *Д. И. Шерман*, Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Издат. АН СССР, М.-Л., 1962, 405—468. 10. *Трантер*, The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. Quart. J. Mech. and App. Math., Vol. 4, part. 3, 1961, 283—292. 11. *Трантер*, Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc. Vol. 4, part. 2. 1959, 49—57. 12. *Шеперд*, On trigonometrical series with mixed conditions. Pros. London Math. Soc. (2), Vol. 43, 1937, 366—375. 13. *С. П. Тимошенко*, Теория упругости. ОНТИ, М., 1937. 14. *И. С. Градштейн* и *И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.