ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 3

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. Хачиян

К вопросу о влиянии деформации сдвига при свободных и вынужденных колебаниях гибких сооружений

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 10/V 1963)

При решении динамических задач сейсмостойкости в ряде случаев необходим совместный учет деформаций изгиба и сдвига, причем влиянием инерции вращения можно пренебречь. Это допустимо, так как при колебаниях реальных сооружений преобладающее значение имеют первые две-три формы колебания. В последнее время в литературе появились некоторые исследования в этом направлении. Они, в основном, относятся к свободным колебаниям. В настоящей статье приводится решение задачи о свободных и вынужденных колебаниях гибких сооружений с использованием неоднородных граничных условий. Из уравнения Тимошенко ([1]), пренебрегая инерцией вращения, получим уравнение свободных колебаний балки с учетом деформации сдвига.

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{q}{g}\frac{EJk'}{FG}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}=0, \tag{1}$$

где y — общий прогиб балки с учетом деформаций изгиба и сдвига, E — модель упругости при растяжении, G — модуль упругости при сдвиге, J — момент инерции поперечного сечения, F — площадь поперечного сечения, k' — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, q — вес единицы длины балки, g — ускорение свободного падения. При этом изгибающие моменты и поперечные силы имеют следующие значения

$$M=EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{EJk'}{FG}\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$Q=EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-\frac{EJk'}{FG}\frac{q}{g}\frac{\partial^3 y}{\partial t^2\partial x}. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищем в следующем виде:

$$y(x,\ t)=\sum_{j=1}^{\infty}Y_j(x)\,T_j(t). \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (^{1}) и разделяя переменные, получим следующие уравнения для определения фундаментальных функций $Y_j(x)$ и обобщенных координат $T_j(t)$

$$Y_j^{IV}(x) - \alpha_j Y_j(x) + \beta_j Y_j''(x) = 0, \tag{5}$$

$$T_j''(t) + p_j^2 T_j(t) = 0, \tag{6}$$

где приняты обозначения:

$$\alpha_j = \frac{p_j^2 q}{gEJ}, \quad \beta_j = \frac{p_j^2 q k'}{gFG}. \tag{7}$$

Здесь p_j — круговая частота свободных колебаний j-ой формы. Решение уравнения (5) ищем в виде

$$Y_j(x) = A_j \sin\lambda_{1j}x + B_j \cos\lambda_{1j}x + C_j \operatorname{sh}\lambda_{2j}x + D_j \operatorname{ch}\lambda_{2j}x. \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение (5), убедимся, что λ_{1j} и λ_{2j} должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \lambda_{1j}^4 - \lambda_{1j}^2\beta_j - \alpha_j = 0, \\ \lambda_{2j}^4 + \lambda_{2j}^2\beta_j - \alpha_j = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Коэффициенты A_j, B_j, C_j и D_j, а также круговые частоты p_j определяются из граничных условий. На свободно опертом конце, где прогиб и изгибающий момент равны нулю, будем иметь:

$$y_j(x, t) = 0, \qquad EJ\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} = \frac{EJk'}{FG}\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2}. \tag{10}$$

На закрепленном конце равны нулю прогиб и угол наклона от изгиба, и мы имеем:

$$y_j(x, t) = 0, \qquad \frac{EJ}{FG}\frac{\partial^3 y_j}{\partial x^3} = -\frac{\partial y_j}{\partial x} + \frac{EJk'}{FG}\frac{q}{g}\frac{\partial^3 y_j}{\partial t^2 \partial x}, \tag{11}$$

или

$$\frac{\partial y_j}{\partial x} = \frac{k'}{FG}\int_l^0 \frac{q}{g}\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2}\,dx. \tag{12}$$

На свободном конце, где равны нулю изгибающий момент и поперечная сила, имеем:

$$EJ\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} = \frac{EJk'}{FG}\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2}, \quad EJ\frac{\partial^3 y_j}{\partial x^3} = \frac{EJk'}{FG}\frac{q}{g}\frac{\partial^3 y_j}{\partial t^2 \partial x}. \tag{13}$$

Рассмотрим часто встречающийся в инженерной практике случай консольного бруса.

Начало координат возьмем в точке защемления, направляя ось ox вертикально вверх.

Граничные условия для этого случая на основании формул (10)—(13) будут:

при $\quad x=0 \qquad Y_j(x)=0, \quad Y_j'(x)=\beta_j \int\limits_0^l Y_j(x)\,dx, \qquad (14)$

при $\quad x=l \qquad Y_j''(x)=-\beta_j Y_j(x), \quad Y_j'''(x)=-\beta_j Y_j'(x). \qquad (15)$

Подставляя выражение (8) в граничные условия (14) и (15), получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов A_j; B_j; C_j; D_j;

$$\begin{gathered}
B_j+D_j=0,\\
A_j\left(-\frac{\cos\lambda_{1j}l}{\lambda_{1j}}+\frac{1}{\lambda_{1j}}-\frac{\lambda_{1j}}{\beta_j}\right)+B_j\,\frac{\sin\lambda_{1j}l}{\lambda_{1j}}+\\
+C_j\left(\frac{\operatorname{ch}\lambda_{2j}l}{\lambda_{2j}}-\frac{1}{\lambda_{2j}}-\frac{\lambda_{2j}}{\beta_j}\right)+\frac{D_j\operatorname{sh}\lambda_{2j}l}{\lambda_{2j}}=0,\\
A_j(-\lambda_{1j}^2+\beta_j)\sin\lambda_{1j}l+B_j(-\lambda_{1j}^2+\beta_j)\cos\lambda_{1j}l+\\
+C_j(\lambda_{2j}^2+\beta_j)\operatorname{sh}\lambda_{2j}l+D_j(\lambda_{2j}^2+\beta_j)\operatorname{ch}\lambda_{2j}l=0,\\
A_j\,\lambda_{1j}(-\lambda_{1j}^2+\beta_j)\cos\lambda_{1j}l+B_j\,\lambda_{1j}(\lambda_{1j}^2-\beta_j)\sin\lambda_{1j}l+\\
+C_j\,\lambda_{2j}(\lambda_{2j}^2+\beta_j)\operatorname{ch}\lambda_{2j}l+D_j\,\lambda_{2j}(\lambda_{2j}^2+\beta_j)\operatorname{sh}\lambda_{2j}l=0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Приравнивая нулю определитель полученной системы уравнений (16), получим уравнение частот в виде:

$$\frac{\omega_j^4+k_j^4}{k_j^2-\omega_j^2}\operatorname{ch}\omega_j\cos k_j-\omega_j k_j\sin k_j\operatorname{sh}\omega_j+\frac{2k_j^2\omega_j^2}{k_j^2-\omega_j^2}=0. \tag{17}$$

Заметим, что при отсутствии сдвига $\beta_j=0$, $k_j=\omega_j$ и уравнение (17) переходит в обычное уравнение частот изгибных колебаний [1]

$$\operatorname{ch}k\cos k+1=0. \tag{18}$$

Если же в уравнении (17) положить $\omega_j=0$, то получим уравнение частот при чисто сдвиговых колебаниях [2]

$$\cos k=0.$$

Из уравнений (9) получим еще одно уравнение, связывающее ω_j и k_j,

$$\frac{k_j^2}{\sqrt{1+\nu^2k_j^2}}=\frac{\omega_j^2}{\sqrt{1-\nu^2\omega_j^2}}, \tag{19}$$

где приняты обозначения:

$$\lambda_{1j}l=k_j, \qquad \lambda_{2j}l=\omega_j, \qquad \nu^2=\frac{EJk'}{FGl^2}. \tag{20}$$

На основании формул (7) и (9) для круговой частоты p_j, имеем:

$$p_j=\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{k_j^4}{1+\nu^2k_j^2}}\sqrt{\frac{gEJ}{q}}. \tag{21}$$

Из системы уравнений (16) для коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j получим:

$$A_j = \frac{-k_j^3\omega_j \operatorname{sh}\omega_j \sin k_j - k_j\omega_j^2 \operatorname{ch}\omega_j \cos k_j - k_j^3}{-k_j^2\omega_j \operatorname{ch}\omega_j \cos k_j + k_j\omega_j^2 \operatorname{sh}\omega_j \sin k_j - \omega_j^3} C_j,$$

$$B_j = \frac{k_j\omega_j^2 \operatorname{ch}\omega_j \sin k_j - k_j^2\omega_j \operatorname{sh}\omega_j \cos k_j}{-k_j^2\omega_j \operatorname{ch}\omega_j \cos k_j + k_j\omega_j^2 \operatorname{sh}\omega_j \sin k_j - \omega_j^3} C_j, \tag{22}$$

$$D_j = -\frac{k_j\omega_j^2 \operatorname{ch}\omega_j \sin k_j - k_j^2\omega_j \operatorname{sh}\omega_j \cos k_j}{-k_j^2\omega_j \operatorname{ch}\omega_j \cos k_j + k_j\omega_j^2 \operatorname{sh}\omega_j \sin k_j - \omega_j^3} C_j.$$

Фундаментальные функции $Y_j(x)$ будут иметь следующий окончательный вид:

$$Y_j(x) = A_j \sin k_j \frac{x}{l} + B_j \cos k_j \frac{x}{l} + C_j \operatorname{sh}\omega_j \frac{x}{l} + D_j \operatorname{ch}\omega_j \frac{x}{l}. \tag{23}$$

Теперь допустим, что на систему действует произвольная сила $f(x, t)$, тогда уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{q}{g}\frac{EJk'}{FG}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = f(x, t). \tag{24}$$

Решение уравнения (24) состоит из двух частей

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t),$$

где $y_1(x, t)$ — общее решение без правой части, которое мы уже нашли, а $y_2(x, t)$ — частное решение с правой частью. Частное решение $y_2(x, t)$ будем искать по методу академика А. Н. Крылова ([3]) в виде разложения в ряд по фундаментальным функциям

$$y_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(x) S_j(t). \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (24) и учитывая, что $Y_j(x)$ удовлетворяют уравнению (5), получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[Y_j(x) - \frac{EJk'}{FG}Y_j^{\cdot\cdot}(x)\right][p_j^2 S_j(t) + S_j^{\cdot\cdot}(t)] = \frac{g}{q}f(x, t). \tag{26}$$

Умножая обе части уравнения (26) на

$$Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG}Y_k^{\cdot\cdot}(x)$$

и интегрируя от 0 до l, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^l\left[Y_j(x) - \frac{EJk'}{FG}Y_j^{\cdot\cdot}(x)\right]\left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG}Y_k^{\cdot\cdot}(x)\right][p_j^2 S_j(t) + S_j^{\cdot\cdot}(t)]\,dx =$$

$$= \frac{g}{q}\int_0^l f(x, t)\left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG}Y_k^{\cdot\cdot}(x)\right]dx. \tag{27}$$

Теперь докажем, что имеет место равенство

$$\int_0^l \left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_k(x) \right] \left[Y_j(x) - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_j(x) \right] dx = 0, \text{ при } j \neq k, \quad (28)$$

которое будет условием ортогональности в случае учета влияния деформации сдвига на прогиб балки.

Действительно, согласно (5) имеем:

$$\begin{aligned} Y_k^{IV} &= \frac{p_k^2 q}{gEJ} \left(Y_k - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_k \right), \\ Y_j^{IV} &= \frac{p_j^2 q}{gEJ} \left(Y_j - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_j \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Умножая первое уравнение системы (29) на $Y_j - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_j$, а второе — на $Y_k - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_k$, вычитывая из первого второе, и интегрируя в интервале $[0, l]$ получим:

$$\begin{aligned} &\frac{q}{gEJ} (p_k^2 - p_j^2) \int_0^l \left(Y_k - \frac{EJk}{FG} \ddot{Y}_k \right) \left(Y_j - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_j \right) dx = \\ &= \int_0^l \left[Y_k^{IV} \left(Y_j - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_j \right) - Y_j^{IV} \left(Y_k - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_k \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Интегрируя правую часть (30) по частям, получим

$$\begin{aligned} &\frac{q}{gEJ} (p_k^2 - p_j^2) \int_0^l \left(Y_k - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_k \right) \left(Y_j - \frac{EJk'}{FG} \ddot{Y}_j \right) dx = \\ &= \left[Y_k''' Y_j - Y_j''' Y_k + Y_k'' Y_j' - Y_j'' Y_k' + \frac{EJk'}{FG} \left(Y_j''' \ddot{Y}_k - \ddot{Y}_j Y_k''' \right) \right] \Bigg|_0^l . \end{aligned} \quad (31)$$

На основании граничных условий (10)—(13) можно убедиться, что правая часть выражения (31) равна нулю.

Однако для доказательства последнего лучше пользоваться граничными условиями для деформаций изгиба и сдвига в отдельности. Так, например, для консольного стержня представляя общий прогиб балки через сумму прогибов от деформации изгиба Y_u и от деформации сдвига Y_c

$$Y = Y_u + Y_c,$$

будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x = 0 \qquad Y_u = 0, \quad Y_u' = 0, \quad Y_c = 0, \\ &\text{при} \quad x = l \qquad Y_u'' = 0, \quad Y_u''' = 0, \quad Y_c' = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

Причем Y_u и Y_c удовлетворяют уравнениям

$$Y_u^{IV} - a^2 Y_u = 0, \qquad Y_c^{\cdot\cdot} + b^2 Y_c = 0 \tag{33}$$

и условию совместимости деформаций изгиба и сдвига

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad Q = -\frac{FG}{k'}\frac{dY_c}{dx}, \qquad M = EJ\frac{d^2 Y_u}{dx^2},$$

откуда

$$EJ\frac{d^3 Y_u}{dx^3} = -\frac{FG}{k'}\frac{dY_c}{dx}. \tag{34}$$

Учитывая условия (32) и уравнения (33) и (34), легко убедиться, что правая часть выражения (31) при $k \neq j$ равна нулю.

Теперь выражение (27) примет вид

$$\int_0^l \left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG} Y_k^{\cdot\cdot}(x) \right]^2 [S_k^{\cdot\cdot} + p_k^2 S_k] \cdot dx =$$

$$= \frac{q}{g}\int_0^l f(x, t)\left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG} Y_k^{\cdot\cdot}(x) \right] dx,$$

или

$$S_k^{\cdot\cdot}(t) + p_k^2 S_k(t) = H_k(t), \tag{35}$$

где

$$H_k(t) = \frac{q}{g}\,\frac{\int_0^l f(x, t)\left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG} Y_k^{\cdot\cdot} \right] dx}{\int_0^l \left[Y_k(x) - \frac{EJk'}{FG} Y_k^{\cdot\cdot}(x) \right]^2 dx}. \tag{36}$$

Общее решение (35) есть

$$S_k(t) = C_1 \sin p_k t + C_2 \cos p_k t + \frac{1}{p_k}\int_0^t H_k(\xi)\sin p_k(t - \xi)\, d\xi. \tag{37}$$

Таким образом, общее решение задачи будет

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[Y_j(x)(C_1 \sin p_j t + C_2 \cos p_j t) + \frac{Y_j(x)}{p_j}\int_0^t H_j(\xi)\sin p_j(t - \xi)\, d\xi \right]. \tag{38}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

Полученные здесь результаты предполагается использовать для определения сейсмических сил по акселерограммам сильных землетрясений.

Армянский НИИ
стройматериалов и сооружений

Է. Ե. ԽԱՉԻՅԱՆ

Ձլուն կառուցվածքների սեփական և ստիպողական տատանումների ժամանակ սահքի դեֆորմացիայի ազդեցության հարցի շուրջը

Հոդվածում բերվում է ձողերի տատանումների ժամանակ սահքի դեֆորմացիաների ազդեցության ուսումնասիրությունը։ Սեփական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը ունի (3) տեսքը։ Այդ հավասարման լուծումն ընտրելով (4) տեսքով, ֆունդամենտալ ֆունկցիաների որոշման համար ստացված է (5) հավասարումը, որի լուծումն ընտրվում է (8) ձևով։ Կոնսոլային ձողի համար ելնելով (10)—(13) եզրային պայմաններից՝ A_j, B_j, C_j, D_j *անորոշ գործակիցների համար ստացվում է (16) հավասարումների սիստեմը, որի համատեղելիության պայմանից ստացվում է հաճախականությունների (17) հավասարումը։ Անորոշ գործակիցները որոշվում են (22) վերջնական հավասարումներով։*

Ստիպողական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումն ունի (24) տեսքը, որի մասնավոր լուծումը որոնվում է (25) ձևով։ Կատարելով որոշ ձևափոխություններ և ապացուցելով, որ տեղի ունի (28) պայմանը, որը հանդիսանում է սահքի դեֆորմացիաների դեպքում օրթոգոնալության պայմանը, ստացված է ստիպողական տատանումների (35) վերջնական հավասարումների ընդհանուր լուծումը տրվում է (38) հավասարումով, որտեղ C_1 *և* C_2 *գործակիցները որոշվում են նախնական պայմաններից։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. П. Тимошенко*, Колебания в инженерном деле, Физматгиз, 1959. [2] *А. Г. Назаров*, Метод инженерного анализа сейсмических сил, Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1959. [3] *А. И. Крылов*, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Гостехиздат, 1950.