ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVII 1963 2

МЕХАНИКА

М. М. Манукян

О вдавливании жесткого клина в полуплоскость в условиях неустановившейся ползучести

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 1/II 1963)

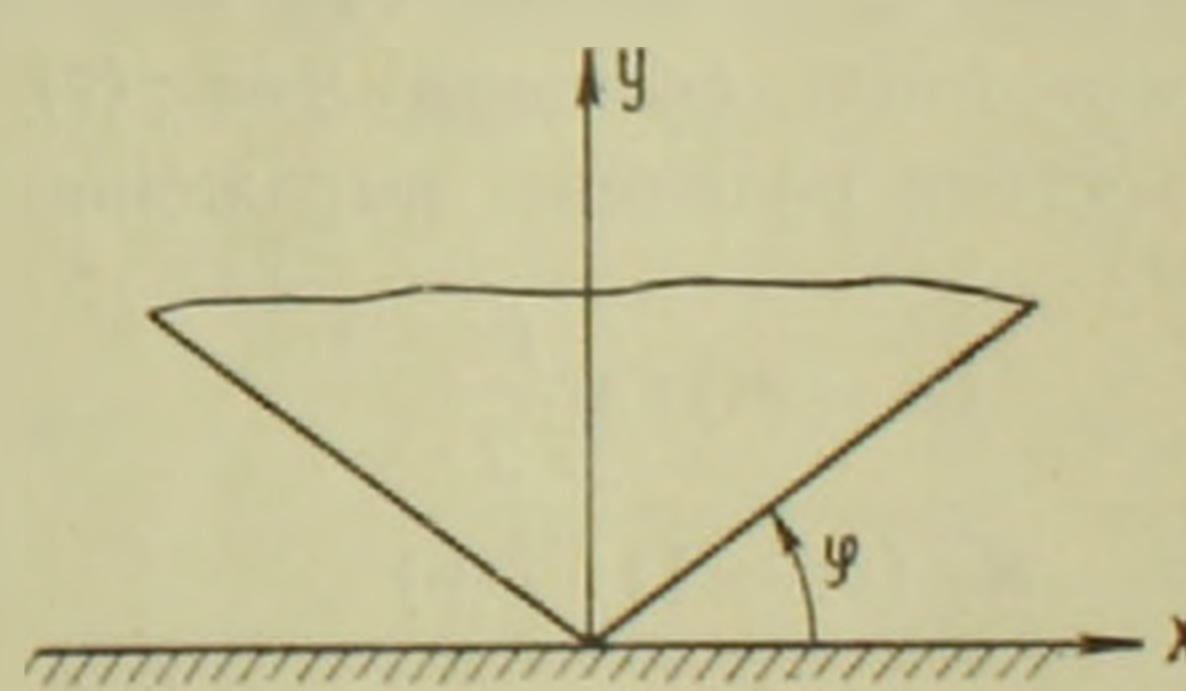
В настоящей работе рассматривается задача о вдавливании жесткого клина в полуплоскость, находящуюся в условиях неустановившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями. В качестве исходной физической гипотезы здесь принимается теория пластической наследственности ([1, 2]) для таких стареющих материалов, как алюминиевые сплавы, медь, малоуглеродистая сталь и др. Задача решается методом, развитым в работе ([3]).

При решении этой задачи предполагаем, что сила трения отсутствует.

Пусть имеем плоский клин. Начало координат поместим в точке O и направим координатные оси x и y, как показано на фиг. 1. Тогда уравнение поверхности клина будет

$$f(x) = k|x| \qquad (k = \operatorname{tg}\varphi). \tag{1}$$

Здесь φ — угол, составленный гранью клина с осью OX.



Фиг. 1.

Как известно, уравнения теории пластической наследственности, связывающие интенсивность деформаций $\varepsilon_i(t)$ с интенсивностью напряжений $\sigma_i(t)$, с учетом ползучести материала имеют следующий вид:

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\,\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau \tag{2}$$

Здесь $C(t,\tau)$ — мера ползучести материала, а $\varphi^*[\varepsilon_i(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между его напряжениями и деформациями; оба они определяются из опыта в результате испытания на простую ползучесть, τ_1 — возраст материала, t — время.

Опытные кривые ползучести для металлов достаточно хорошо описываются степенным законом вида

$$\varphi^{*}[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\,\varepsilon_i(t) = K_0\,\varepsilon_i^{\mu}(t), \tag{3}$$

где K_0 и μ — некоторые физические константы, определяемые из опыта при испытании на простую ползучесть, причем $0 < \mu < 1$.

Пусть первоначальное касание клина в плоскости xy происходит в одной точке, которая принята за начало координат. Положим далее, что областью контакта после сжатия будет отрезок оси x, $-(at) < x \leqslant a(t)$.

Решение рассматриваемой задачи, которое в сущности состоит в отыскании неизвестной функции двух переменных $P(x, t)$, характеризующей распределение интенсивности давления на участке контакта, сводится к совместному решению связанных между собой следующих двух интегральных уравнений [3]

$$\omega(x, t) - \int_{\tau_1}^{t} \omega(x, \tau)\,\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}\,d\tau = [\gamma(t) - \alpha|x|]^{\mu}, \tag{4}$$

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{P(s, t)\,ds}{|s - x|^{1-\mu}} = \omega(x, t) \qquad \alpha = \frac{k}{A}, \qquad (-a(t) \leqslant x \leqslant a(t)). \tag{5}$$

Здесь $\gamma(t)$ — неизвестная функция от t, подлежащая определению в дальнейшем, $\omega(x, t)$ — функция, которая, являясь решением интегрального уравнения (4), зависит как от аргументов x и t, так и от неизвестной функции $\gamma = \gamma(t)$, $2a = 2a(t)$ — ширина контакта, A — известная величина, выражение которой определяется формулами

$$A = \frac{(2 - m)\sin\dfrac{l\pi}{2}}{K_0^{m}(m - 1)\,I^{m}(\mu)} \qquad \left(l = \frac{\sqrt{2\mu - 1}}{\mu}\right)$$

$$I(\mu) = 4l^{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos l\theta)^{\mu}\cos\theta\,d\theta \qquad \left(m = \frac{1}{\mu}\right) \qquad \text{для} \quad \mu > \frac{1}{2} \tag{6}$$

$$A = \frac{(2 - m)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}}{K_0^{m}(m - 1)\,I^{m}(\mu)} \qquad \left(\beta = \frac{\sqrt{1 - 2\mu}}{\mu}\right)$$

$$I(\mu) = 4\beta^{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ch}\beta\theta)^{\mu}\cos\theta\,d\theta \qquad \text{для} \quad \mu < \frac{1}{2} \tag{7}$$

Интегральное уравнение (4), которому должна удовлетворять $\omega(x, t)$, как функция времени t, учитывает влияние ползучести материала на распределение контактного усилия и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое для различных случаев ядер ползучести $K(t, \tau) = \dfrac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$ подробно исследовано в работах [1, 2, 4].

Решение уравнения (4) можно написать в виде

$$\omega(x, t) = [\gamma(t) - \alpha |x|]^{\mu} + \int_{\tau_1}^{t} [\gamma(\tau) - \alpha |x|]^{\mu} R(t, \tau)\, d\tau, \tag{8}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента линейного интегрального уравнения с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Из (8) следует, что $\omega(x, t)$ зависит также от неизвестной функции $\gamma(t)$.

Уравнение (5), которому должна удовлетворять $P(x, t)$ функция аргумента x, представляет собой сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром

$$K(x, s) = |s - x|^{\mu - 1} \qquad (0 < \mu < 1)$$

и с правой частью $\omega(x, t)$, которая является решением интегрального уравнения (4), и может быть рассмотрено при каждом фиксированном t как основное интегральное уравнение для изучения вдавливания жесткого клина в полуплоскость с учетом неустановившейся ползучести. В частном случае, когда $t = \tau_1$, из (4) следует, что

$$\omega(x, \tau_1) = \omega(x) = [\gamma - \alpha |x|]^{\mu} \tag{9}$$

и интегральное уравнение (5) примет вид

$$\int_{-a}^{a} \frac{P(s)\, ds}{|s - x|^{1-\mu}} = [\gamma - \alpha |x|]^{\mu}. \tag{10}$$

Это является основным интегральным уравнением для изучения вдавливания жесткого клина в полуплоскость с учетом установившейся ползучести [5].

Если обозначить через $g(s, a)$ решения уравнения (5) при $\omega(x, t) = 1$, то общее решение интегрального уравнения (5), согласно [6], будет

$$P(x, t) = \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^{a} g(s, a)\, \omega(s, t)\, ds \right] g(x, a) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x}^{a} g(x, u) \frac{d}{du} \frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int_{-u}^{u} g(s, u)\, \omega(s, t)\, ds \,\Big|\, du -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{a}\frac{g(x, u)\,du}{M'(u)}\int\limits_{-u}^{u} g(s, u)\,\omega'(s, t)\,ds. \tag{11}$$

Здесь

$$M(u) = \int\limits_{0}^{u} g(s, u)\,ds \qquad (0 \leqslant u \leqslant a) \tag{12}$$

$$\omega'(s, t) = \frac{\partial\omega(s, t)}{\partial s} \tag{13}$$

$$g(s, a) = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{\pi\sqrt{(a^2 - s^2)^{\mu}}} \tag{14}$$

Как известно, в нашем случае, при неустановившейся ползучести, ширина контакта $2a$ зависит от времени t, но здесь и в дальнейшем для простоты записи мы часто будем писать $2a$ без указания ее аргумента t.

Пользуясь формулами (12) и (14), для $M(s)$ получим

$$M(s) = \frac{2\sqrt{\pi}\, s^{1-\mu}}{(1-\mu)\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}, \tag{15}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Нетрудно видеть, что $g(s, u)$ — четная функция, а $\omega'(s, t)$, как это следует из (8) и (13), нечетная функция, поэтому последний член в правой части формулы (11) пропадает и выражение $P(x, t)$ после некоторых преобразований принимает вид

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a, t, \gamma)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}} - \int\limits_{x}^{a}\frac{du}{\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}}\frac{d}{du}\left[u^{\mu}\Phi_1'(u, t, \gamma)\right]\right\}, \tag{16}$$

где

$$\Phi_1(u, t, \gamma) = \int\limits_{0}^{u}\frac{\omega(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}, \qquad \Phi_1'(u, t, \gamma) = \frac{d}{du}\int\limits_{0}^{u}\frac{\omega(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}}. \tag{17}$$

$$K(\mu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\pi^2}\sin^2\frac{\pi\mu}{2}. \tag{18}$$

Путем замены переменной $s = u\sin\varphi$ выражение для $\Phi_1(u, t, \gamma)$ можно представить в виде интеграла с постоянными пределами

$$\Phi_1(u, t, \gamma) = u^{1-\mu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(u\sin\varphi, t)\cos^{1-\mu}\varphi\, d\varphi. \tag{19}$$

Предполагая для функции $\omega(s, t)$ существование непрерывной и ограниченной производной при $s > 0$, после дифференцирования под знаком интеграла (19) получим следующее соотношение, связывающее $\Phi_1'(u, t, \gamma)$ с $\Phi_1(u, t, \gamma)$:

$$u\Phi_1'(u, t, \gamma) = (1-\mu)\Phi_1(u, t, \gamma) + \int\limits_0^u \frac{\omega'(s, t)\, s\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}. \tag{20}$$

Пользуясь (20), нетрудно непосредственным дифференцированием убедиться, что

$$\frac{d}{du}\left[u^\mu \Phi_1'(u, t, \gamma)\right] = u^{\mu-1}\frac{d}{du}\int\limits_0^u \frac{s\omega'(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}. \tag{21}$$

Производя интегрирование по частям в правой части равенства (21) и дифференцируя затем полученное выражение по u, будем иметь

$$\frac{d}{du}\left[u\Phi_1'(u, t, \gamma)\right] = u^\mu\int\limits_0^u \frac{\omega''(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} + \omega'(o, t). \tag{22}$$

Подставляя это выражение в равенство (16), получим

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^\mu\Phi_1'(a, t, \gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}} - \int\limits_a^x \frac{u^\mu\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}}\int\limits_0^u \frac{\omega''(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}} - \right.$$

$$\left. - \omega'(o, t)\int\limits_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}}\right\}. \tag{23}$$

Здесь для производной $\omega'(o, t)$, очевидно, можно взять ее правый предел. Тогда из (8) следует

$$\omega'(o, t) = \omega'(+o, t) = -2\mu H_1(\gamma, t, \tau_1), \tag{24}$$

где

$$H_1(\gamma, t, \tau_1) = |\gamma(t)|^{\mu-1} + \int\limits_{\tau_1}^t |\gamma(\tau)|^{\mu-1}R(t, \tau)\,d\tau. \tag{25}$$

Тогда выражению $p(x, t)$ можно дать следующий вид

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^\mu\Phi_1(a, t, \gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}} + 2^2\mu(1-\mu)\int\limits_a^x \frac{u^\mu\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}} \times\right.$$

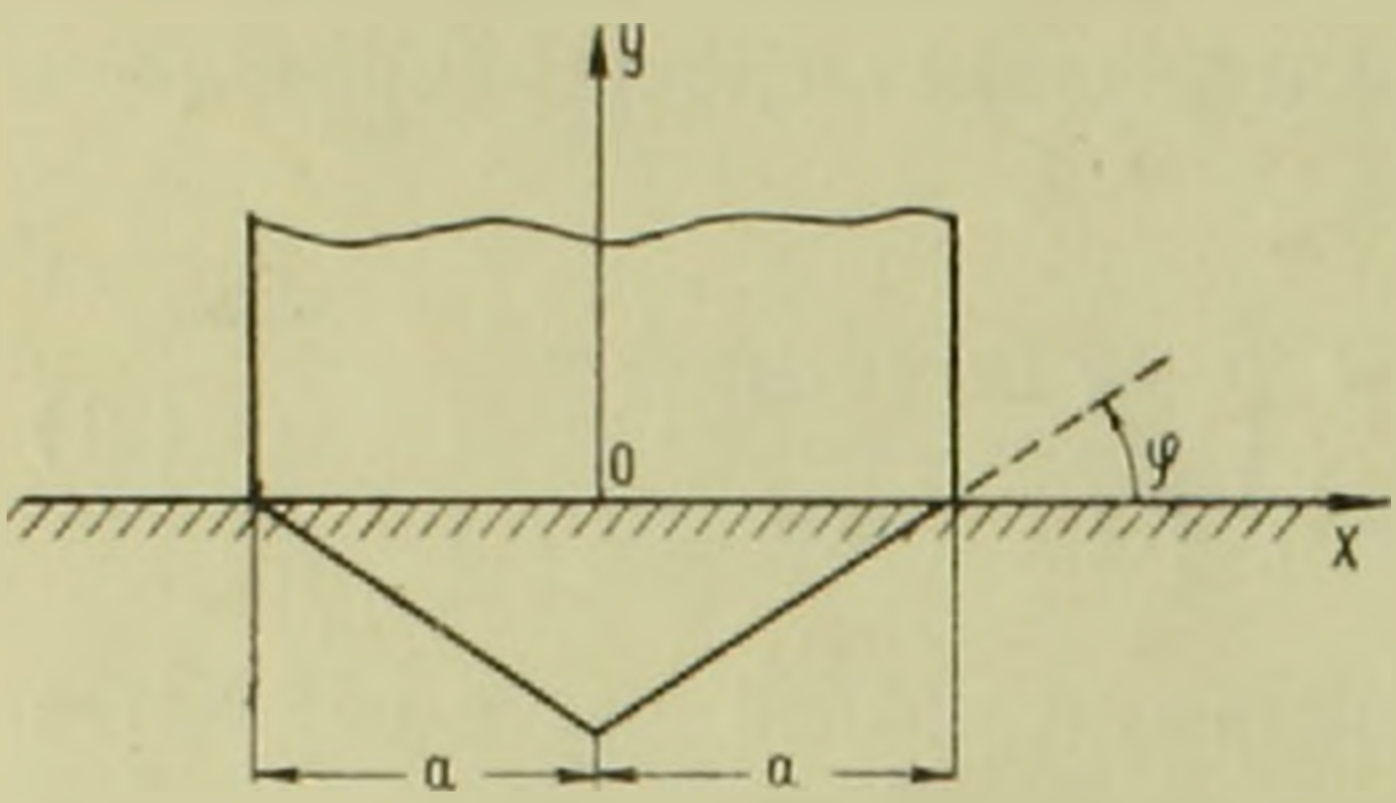
$$\times \int_0^u \frac{H_2(\gamma, t, \tau_1, s)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} + \alpha\mu H_1(\gamma, t, \tau_1) \int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}} \Bigg\}, \tag{26}$$

где

$$H_2(\gamma, t, \tau_1, x) = |\gamma(t) - \alpha|x||^{\mu-2} + \int_{\tau_1}^{t} |\gamma(\tau) - \alpha|x||^{\mu-2} R(t, \tau)\,d\tau. \tag{27}$$

Здесь могут иметь место два случая: 1) длина контакта известна и 2) длина контакта неизвестна.

1. Рассмотрим случай, когда длина контакта известна (фиг. 2). В формуле (26) правый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a(t) = 2a$. При этом неизвестная функция $\gamma(t)$ определяется из уравнения равновесия



Фиг. 2.

$$P = 2\int_0^a p(x, t)\,dx. \tag{28}$$

Подставляя выражение для $p(x, t)$ из (23) в уравнение (28) и пользуясь равенством (24), получим

$$P = 2K(\mu)\Bigg\{a\Phi_1'(a, t, \gamma)\frac{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} +$$

$$+ \alpha\mu H_1(\gamma, t, \tau_1)\int_0^a dx \int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}} -$$

$$- \int_0^a dx \int_x^a \frac{u^\mu\,du}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} \int_0^u \frac{\omega''(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}\Bigg\}. \tag{29}$$

Здесь использовано значение интеграла

$$J_1 = \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} u^{1-\mu}. \tag{30}$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом выражения (29), найдем

$$\int_0^a dx \int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}} = \int_0^a du \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)(2-\mu)K(\mu)\pi}\, a^{2-\mu}. \tag{31}$$

Тогда (29) примет следующий вид:

$$P = \frac{1}{(1-\mu)\pi}\sin\frac{\pi\mu}{2}\left| a\Phi_1'(a, t, \gamma) + \frac{2\mu H_1(\gamma, t, \tau_1)}{2-\mu} a^{2-\mu} \right. -$$

$$\left. -2K(\mu)\int_0^a dx \int_x^a \frac{u^\mu\, du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}} \int_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} \right|. \tag{32}$$

Меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом выражения (32) и пользуясь равенством (30), имеем

$$I_2 = \int_0^a dx \int_x^a \frac{u^\mu\, du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}} \int_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}\int_0^a u\,du \int_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}. \tag{33}$$

Далее, применяя формулу Дирихле и замечая при этом, что

$$\int_s^a \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} = \frac{1}{2-\mu}(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}, \tag{34}$$

выражению I_2 можно придать следующий вид:

$$I_2 = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{2(1-\mu)(2-\mu)K(\mu)\pi}\int_0^a (u^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\,\omega''(s, t)\, ds. \tag{35}$$

Подставляя значение I_2 из (35) в (32), получим

$$P = \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{(1-\mu)\pi}\left| a\Phi_1'(a, t, \gamma) + \frac{2\mu H_1(\gamma, t, \tau_1)}{2-\mu} a^{2-\mu} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2-\mu}\int_0^a (a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\,\omega''(s, t)\, ds \right|. \tag{36}$$

Если в соотношении (20) последнее слагаемое проинтегрировать по частям, используя при этом выражение (24), то оно примет следующий вид:

$$u\Phi_1'(u, t, \gamma) = (1-\mu)\,\Phi_1(u, t, \gamma) - \frac{\alpha\mu H_1(\gamma, t, \tau_1)}{2-\mu} u^{2-\mu} +$$

$$+ \frac{1}{2-\mu}\int_0^u (u^2 - s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\,\omega''(s, t)\,ds. \tag{37}$$

Пользуясь соотношением (37), уравнение (36) можно привести к виду

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \frac{\pi P}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}, \tag{38}$$

где

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \int_0^a \frac{\omega(s, t)\,ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)^{\mu}}}, \tag{39}$$

$$\omega(s, t) = |\gamma(t) - \alpha|s||^{\mu} + \int_{\tau_1}^{t} |\gamma(\tau) - \alpha|s||^{\mu} R(t, \tau)\,d\tau. \tag{40}$$

Подставляя (39) в (38), получим

$$\int_0^a \frac{\omega(s, t)\,ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)^{\mu}}} = \frac{\pi P}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}. \tag{41}$$

Таким образом, если ширина контакта $2a(t) = 2a$ задана, то неизвестная функция $\gamma = \gamma(t)$, входящая в формулу для $p(x, t)$ (26), определяется из уравнения (41). Это уравнение можно решить при помощи численных методов.

2°. Перейдем к рассмотрению второго случая, когда длина контакта неизвестна. Очевидно, что в этом случае значение $\gamma = \gamma(t)$ тоже будет неизвестным. Здесь для определения неизвестных $a(t)$ и $\gamma(t)$ необходимо иметь два уравнения. Одно уравнение получается из требования, чтобы в формуле (26) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \frac{d}{da}\int_0^a \frac{\omega(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^{\mu}}} = 0, \tag{42}$$

а другое уравнение можно получить при помощи уравнения равновесия (28). Подставляя выражение $p(x, t)$ из (26) в (28) и учитывая равенство (42), после применения формулы Дирихле получим

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \int_0^a \frac{\omega(s, t)\,ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)^{\mu}}} = \frac{\pi P}{\sin\frac{\pi\mu}{2}}. \tag{43}$$

Следовательно, уравнение (43) для определения переменной ширины контакта $2a(t)$ тождественно совпадает с уравнением (38) для определения функции $\gamma = \gamma(t)$, когда ширина контакта $2a(t) = 2a$ задана.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Կոշտ սեպի ճնշումը կիսահարթության վրա ոչ հաստատված սողքի պայմաններում

Աշխատանքում դիտարկվում է կոշտ սեպի ճնշումը կիսահարթության վրա ոչ հաստատված սողքի պայմաններում, երբ լարվածության և սողքի դեֆորմացիայի միջև գոյություն ունեցող կապն արտահայտվում է աստիճանային օրենքով։ Որպես ֆիզիկական հիպոթեզ ընդունված է պլաստիկական ժառանգականության տեսությունը, որը, ինչպես ցույց են տալիս էքսպերիմենտալ հետազոտությունները, բավականաչափ ճշգրիտ բնութագրում է մետաղների սողքը։

Դիտարկվող կոնտակտային խնդրի լուծումը բերվում է (4) և (5) ինտեգրալ հավասարումների համատեղ լուծմանը, որոնցից առաջինը իրենից ներկայացնում է Վոլտերի երկրորդ սեռի գծային ինտեգրալ հավասարում, իսկ երկրորդը՝ Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում։ (5) սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծումը, Մ. Գ. Կրեյնի (6) առաջարկած մեթոդի համաձայն, ներկայացվում է (11) տեսքով։

Մի շարք ձևափոխություններից հետո որոշվում է անհայտ $p(x,t)$ ֆունկցիայի վերջնական տեսքը (26), որը բնորոշում է ճնշման ինտենսիվությունը կոնտակտային գծամասի վրա։

Քննարկվում է երկու դեպք՝ 1. Կոնտակտի երկարությունը հայտնի է և 2. Կոնտակտի երկարությունը անհայտ է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. Н. Работнов*, Некоторые вопросы теории ползучести, Вестник МГУ, № 10, 1948. [2] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, 1952. [3] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, выпуск 5, 1959. [4] *М. И. Розовский*, ЖТФ, XXV, вып. 13, 1955. [5] *Н. Х. Арутюнян* и *М. М. Манукян*, ПММ, вып. 1, 1952. [6] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 100, № 3 (1955).