ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVII 1963 2

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

О поверхности D_m пространства E_{2m}

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 20/IV 1963)

Будем говорить, что поверхность X_m в проективном пространстве P_n нормализована двойственно, если она нормализована в смысле А. П. Нордена ([1]) и ее нормаль первого рода содержит характеристику семейства гиперплоскостей, касающихся X_m.

В этой заметке мы рассмотрим поверхность X_m, вложенную в эвклидовое пространство E_{2m}. Предположим, что нормальная плоскость поверхности X_m содержит характеристику главных касательных гиперплоскостей, т. е. удовлетворяет условиям двойственной нормализации ([2]).

При этом оказывается, что X_m, удовлетворяющая этим условиям при $m < 2m - 1$, образует определенный класс, который в дальнейшем будем обозначать через D_m.

Пусть x — радиус-вектор точки поверхности, а $\underset{0}{X}$ и $\underset{\alpha}{X}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots m-1)$ направляющие вектора нормали 1-го рода. Тогда системы основных дифференциальных уравнения D_m имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_j x_i = \underset{0}{h_{ij}}\underset{0}{X} + \overset{\alpha}{h}_{ij}\underset{\alpha}{X}, \quad \partial_i \underset{\alpha}{X} = -\underset{\alpha}{h_i^e} x_e + \underset{\alpha}{\overset{\beta}{n}}\underset{\beta}{X}, \\ &X_i = -h_i^e x_e, \quad (i, j, e = 1, 2, \cdots, m) \end{aligned}\right| \tag{1}$$

где считается, что номер внизу под точкой опущен с помощью g_{ij}, а ∇ — символ ковариантного дифференцирования во внутренней римановой связности, который используется для преобразования индексов.

Если составим условия интегрируемости системы основных дифференциальных уравнений (1), то получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot e} = \underset{0}{h_{i[j}} h^e_{k]} + \overset{\alpha}{h}_{i[j} \overset{\alpha}{h}{}^e_{k]}, \qquad \text{II. } \nabla_{[k} h_{j]i} = 0, \\ &\text{III. } \nabla_{[k} \overset{\alpha}{h}_{j]i} + \overset{\beta}{h}_{i[j} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{n}}{}_{k]} = 0, \qquad \text{IV. } \underset{0}{h^e_{[i}} \overset{\alpha}{h}_{j]e} = 0, \\ &\text{V. } \nabla_{[k} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{n}}{}_{j]} - \underset{\beta}{h^e_{[j}} \overset{\alpha}{h}_{k]e} + \underset{\beta}{\overset{\gamma}{n}}{}_{[j} \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{n}}{}_{k]} = 0, \end{aligned}\right| \tag{2}$$

где $R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot r}$ есть тензор кривизны внутренней геометрии D_m. Как известно, матрицу координаты тензора $\underset{0}{h}_{ij}$ можно привести к диагональному виду. Тогда из (2·IV) следует, что матрицу координат тензоров $\overset{\alpha}{h}_{ij}$ приводят к диагональному виду. Действительно, из (2·IV) следует $\underset{0}{h}_i^i \overset{\alpha}{h}_{ji} = 0$ при $j \neq i$ или $\underset{0}{h}_i^i \overset{\alpha}{h}_{ji} = 0$, но так как $\underset{0}{h}_i^i \neq 0$, то $\overset{\alpha}{h}_{ji} = 0$.

Отсюда следует, что тензоры $\underset{0}{h}_{ij}$, $\overset{\alpha}{h}_{ij}$ имеют общее главное направление ([3]).

Таким образом мы видим, что на поверхности D_m, вложенной в E_{2m}, тензоры $\underset{0}{h}_{ij}$, $\overset{\alpha}{h}_{ij}$ имеют общие главные направления.

Обозначим орты главных направлений тензоров $\underset{0}{h}_{ij}$, $\overset{\alpha}{h}_{ij}$ соответственно $(\underset{1}{a}_i, \underset{2}{a}_i, \cdots, \underset{m}{a}_i)$, $(\underset{\alpha_1}{a}_i, \underset{\alpha_2}{a}_i, \cdots, \underset{\alpha_m}{a}_i)$. Но так как в нашем случае главные направления тензоров $\underset{0}{h}_{ij}$, $\overset{\alpha}{h}_{ij}$ совпадают, то

$$\left.\begin{aligned} \underset{0}{h}_{ij} &= \sigma_0 \underset{1}{a}_i \underset{1}{a}_j + \sigma_1 \underset{2}{a}_i \underset{2}{a}_j + \cdots + \sigma_{m-1} \underset{m}{a}_i \underset{m}{a}_j, \\ \overset{\alpha}{h}_{ij} &= \overset{\alpha}{\sigma}_0 \underset{1}{a}_i \underset{1}{a}_j + \overset{\alpha}{\sigma}_1 \underset{2}{a}_i \underset{2}{a}_j + \cdots + \overset{\alpha}{\sigma}_{m-1} \underset{m}{a}_i \underset{m}{a}_j, \end{aligned}\right| \tag{3}$$

где $(\overset{0}{\sigma}_0, \overset{0}{\sigma}_1, \cdots, \overset{0}{\sigma}_{m-1})$, $(\overset{\alpha}{\sigma}_0, \overset{\alpha}{\sigma}_1, \cdots, \overset{\alpha}{\sigma}_{m-1})$ — главные значения тензоров h_{ij}, $\overset{\alpha}{h}_{ij}$ соответственно. Очевидно, все эти результаты верны для поверхности D_m, вложенной в E_n.

Поставим вопрос: существует ли огибающая семейства нормальных плоскостей поверхности D_m.

Рассмотрим точку

$$R = x(u^1, \cdots, u^m) + \overset{0}{A}(u^1, \cdots, u^m) \underset{0}{X} + \overset{\alpha}{A}(u^1, \cdots, u^m) \underset{\alpha}{X} \tag{4}$$

в нормальной плоскости D_m и потребуем, чтобы в этой точке они касались некоторой поверхности, т. е. чтобы векторы R_i разлагались по $\underset{0}{X}$, $\underset{\alpha}{X}$. Имея в виду (4) и (1)

$$R_i = (\delta_i^r - \overset{0}{A} \underset{0}{h}_i^r - \overset{\alpha}{A} \underset{\alpha}{h}_i^r) x_r + \partial_i \overset{0}{A} \underset{0}{X} + (- \overset{\alpha}{A} \partial_i \overset{\beta}{A} + \overset{\alpha}{A} \overset{\beta}{A}) \underset{\beta}{X},$$

откуда получаем условия

$$\delta_i^r - \overset{0}{A} \underset{0}{h}_i^r - \overset{\alpha}{A} \underset{\alpha}{h}_i^r = 0 \quad \text{или} \quad g_{ir} - \overset{0}{A} \underset{0}{h}_{ir} - \overset{\alpha}{A} \underset{\alpha}{h}_{ir} = 0.$$

Если подставим значения тензоров h_{ir}, h_{ir} из (3) в последнее соотношение, получим

$$1 - \overset{ts}{A} \sigma_t = 0 \quad \text{где} \quad (s, r, t = 0, 1, \cdots, m-1).$$

Но так как $\mathrm{Det}\|\overset{s}{\varepsilon}_i\| \neq 0$, то мы можем определить все A, а это значит, что огибающая существует.

Итак мы доказали, что нормальные плоскости D_m, вложенные в E_{2m}, допускают огибающую поверхность. Эту поверхность мы назовем эволютной поверхностью.

Рассмотрим случай, когда $m = 2$. Тогда основные дифференциальные уравнения (1) принимают вид:

$$\nabla_j x_i = h_{ij} X + k_{ij} Y, \quad X_j = -h_j^e X_e, \quad Y_j = -k_j^e X_e,$$

где $h_{ij} = -\partial_i x \partial_j X = X \nabla_j x_i$, $k_{ij} = Y \nabla_j x_i$, а X и Y обозначают, соответственно, нормальный вектор касательной гиперплоскости и вектор характеристической прямой.

Если мы составим условия интегрируемости уравнения (5), получим

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } R_{kji}^{\cdots e} = 2\, h_{i[j}\, h_{k]}^e + 2\, k_{i[j}\, k_{k]}^e, \\ \text{II. } \nabla_{[k} h_{j]i} = 0, \quad \text{III. } \nabla_{[k} k_{j]i} = 0, \\ \text{IV. } h_{[i}^e k_{j]e} = 0, \end{array}\right| \qquad (6)$$

где $R_{kji}^{\cdots e}$ есть тензор кривизны внутренней геометрии D_2.

Условия (6. II, III) показывают, что тензоры h_{ij} и k_{ij} удовлетворяют условиям кодацции. Если чебышевские векторы тензоров h_{ij}, k_{ij} обозначим соответственно h_i, k_i, то для всяких кодацциевых тензоров справедливо (([4]), § 64, (6)).

$$h_i = \frac{1}{4}\partial_i \ln \underset{h}{N}, \qquad k_i = \frac{1}{4}\partial_i \ln \underset{k}{N}, \qquad (7)$$

где $\underset{H}{N}$ и $\underset{K}{N}$ норма тензоров h_{ij}, k_{ij} соответственно.

Таким образом поверхность D_2 в E_4 характеризуется тем, что тензоры h_{ij}, k_{ij} кодацциевы.

Если $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ — единичные и взаимно перпендикулярные нормальные векторы двумерной поверхности X_2, вложенной в E_4, то ее основные дифференциальные уравнения имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_j \boldsymbol{r}_i = a_{ij}\boldsymbol{m} + b_{ij}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{m}_j = -a_j^e \boldsymbol{r}_e + \lambda_j \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_j = -b_j^e \boldsymbol{r}_e - \lambda_j \boldsymbol{m}. \end{array}\right| \qquad (8)$$

где $a_{ij} = \boldsymbol{m}\nabla_j \boldsymbol{r}_i$, $b_{ij} = \boldsymbol{n}\nabla_j \boldsymbol{r}_i$, а ∇ — символ квадратного дифференцирования во внутренней связности поверхности X_2.

Теперь докажем, что если на двумерной поверхности X_2, вложенной в E_4, тензоры a_{ij}, b_{ij} кодацциевы, то поверхность X_2 двойственна, нормализуема.

Составим теперь условия интегрируемости системы (8), имея в виду, что в бинарной области альтернацию можно заменить свертыванием с бивектором ε^{ij}, а для всякого векторного поля справедливо тождество (([4]), § 81) $\varepsilon^{kj}\nabla_k\nabla_j v_i = K \cdot \varepsilon_i^k v_k$, где K — гауссова кривизна. Эти условия сводятся к следующим.

$$
\left.
\begin{array}{ll}
K\varepsilon^{m}_{\cdot l} = \varepsilon^{kj}\left(a_{ij}a^{m}_{\cdot k} + b_{ij}b^{m}_{\cdot k}\right), & \text{(A)} \\
\varepsilon^{jk}\left(\nabla_k a_{ij} - \lambda_k b_{ij}\right) = 0, & \text{(B)} \\
\varepsilon^{jk}\left(\nabla_k b_{ij} + \lambda_k a_{ij}\right) = 0, & \text{(C)} \\
\varepsilon^{jk}\left(\nabla_k \lambda_j - a^{e}_{j} b_{ke}\right) = 0. & \text{(D)}
\end{array}
\right\} \quad (9)
$$

Условие (9.A) равносильно следующему, которое получим, свертывая обе его части с бивектором ε^{ij}

$$
2K = \varepsilon^{lm}\varepsilon^{jk}\left(a_{ij}a_{mq} + b_{ij}b_{mk}\right) \quad \text{или} \quad K = \underset{a}{N} + \underset{b}{N}, \tag{10}
$$

где

$$
\underset{a}{N} = \frac{1}{2}\varepsilon^{lm}\varepsilon^{jk}a_{ij}a_{mk}, \qquad \underset{b}{N} = \frac{1}{2}\varepsilon^{lm}\varepsilon^{jk}b_{ij}b_{mk}.
$$

Но так как на нашей поверхности тензоры a_{ij}, b_{ij} кодацциевы, то условие (9.B) принимает следующий вид:

$$
\lambda_{[k}b_{j]i} = 0.
$$

Свертывая это выражение с $\tilde{b}^{ik}$, т. е. тензором, взаимным тензору b_{ik}, получим $\lambda_{[k}\delta^{k}_{i]} = 0$, или $\lambda_k = 0$.

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Для того, чтобы поверхность X_2, вложенная в E_4, была D_2, необходимо и достаточно, чтобы тензоры a_{ij}, b_{ij} были кодацциевы.*

Если первое выражение (7) умножим на $\underset{h}{N}$, второе $\underset{k}{N}$ сложим и, имея в виду (10), получим выражение

$$
\underset{h}{N}h_l + \underset{k}{N}k_l = \frac{1}{4}\partial_l K,
$$

которое дает связь между чебышевскими векторами сетей h_{ij}, k_{ij}, нормами их тензоров и гауссовой кривизной поверхности D_2.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՋՅԱՆ

D_m մակերևույթները E_{2m} տարածությունում

Մենք կասենք, որ X_m մակերևույթը երկակի նորմալացված է P_n տարածությունում, եթե նա նորմալացված է Ա. Պ. Նորդենի (1) իմաստով և նրա առաջին սեռի նորմալը պարունակում է X_m շոշափող հիպերհարթությունների խարակտերիստիկը:

Այս հոդվածում մենք կդիտարկենք X_m մակերևույթն ընկղմված էվկլիդյան E_{2m} տարածությունում:

Պահանջենք, որ X_m մակերևույթի նորմալ հարթությունը պարունակի շոշափող հիպերհարթությունների խարակտերիստիկը և այդ մակերևույթը նշանակենք D_m:

Ապացուցված է հետևյալը՝

1. D_m մակերևույթի վրա $\underset{0}{h}_{ij}$, h_{ij} տենզորները ունեն ընդհանուր գլխավոր ուղղությունները:

2. Նորմալ հարթությունները D_m մակերևույթը, որը ընկղմված է E_{2m} թույլատրում է պարուրիչ մակերևույթ:

3. Որպեսզի X_2 մակերևույթը, որն ընկղմված է E_4 լինի D_2 անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի a_{ij}, h_{ij} տենզորները լինեն Կոդացու:

ЛИТЕРАТУРА ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, ГИТЛ, 1950. [2] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. 28, № 4 (1959), стр. 151—157. [3] *П. А. Широков*, Тензорное исчисление, изд. КГУ, 1961. [4] *А. П. Норден*, Теория поверхностей, Гостехиздат, 1956.