ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 5

МАТЕМАТИКА

С. Ц. Саркисян

О разрушении решений систем уравнений с частными производными

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 25/XII 1962)

Хорошо известно, что система Коши—Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0,$$

а также ее обобщения—так называемые системы Карлемана[1]

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + C,$$

коэффициенты которых A, B, C определены во всей (открытой) плоскости z и удовлетворяют достаточно общим условиям, допускают решения, дифференцируемые во всей (открытой) плоскости.

Между тем добавление в правой части систем нелинейных членов, определенных для всех значений z и w и даже весьма гладких, может привести к эффекту разрушения решений, т. е. к отсутствию решений, дифференцируемых во всей плоскости. В этой заметке указываются примеры систем, обладающих таким эффектом.

1. Рассмотрим системы вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a\bar{w}^n, \tag{1}$$

где $a(z)$ — целая функция и $n \geqslant 2$ — целое число. Будем говорить, что $w(z)$ является решением системы (1) в окрестности точки z_0 из некоторой области G, если в некоторой окрестности G_0 этой точки $w(z)$ имеет непрерывные производные первого порядка и удовлетворяет системе (1) в G_0. Если $w(z)$ удовлетворяет системе (1) в окрестности каждой точки области G, исключая, быть может, точки некоторого дискретного относительно G множества G_w, то будем говорить, что w является решением системы (1) в области G.

[1] Мы пользуемся векторной записью: $z = x + iy$, $w = u + iv$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Если G_w — пустое множество, то решение w будем называть регулярным решением системы (1). Для регулярных решений системы (1) в области G имеют место:

Теорема 1. *Если для регулярного решения $w(z)$ системы* (1) *существует точка $z_0 \in G$, являющаяся предельной точкой для нулей $w(z)$, то $w(z) \equiv 0$ в G.*

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ — регулярное решение системы* (1) *в некоторой области G. Тогда $w(z)$ имеет вид*

$$w(z) = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}}} \cdot \frac{1}{[\varphi(z) - a(z) \cdot \bar{z}]^{\frac{1}{n-1}}}, \tag{2}$$

где $\varphi(z)$ — мероморфная в G функция.

2. Рассмотрим системы вида

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a(z)\, e^{w}, \tag{3}$$

где $a(z)$ — целая функция комплексного переменного z.

Если регулярные решения системы (3) определить так же, как регулярные решения системы (1), то имеет место

Теорема 3. *Регулярные решения* (3) *в области G представимы в виде*

$$w(z) = \log \frac{1}{\varphi(z) - a(z) \cdot \bar{z}}, \tag{4}$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная в G функция и log *обозначает какую-либо однозначную ветвь логарифма.*

Теорема об изолированности нулей для регулярных решений системы (3) оказывается неверной, что показывает следующий простой пример. Рассмотрим систему вида

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -e^{w}. \tag{5}$$

Пусть область G не имеет общих точек с осью $x = 0$ и содержит отрезок прямой $x = \frac{1}{2}$. Ясно, что в области G функция

$$w = \log \frac{1}{z + \bar{z}} \tag{6}$$

является регулярным решением системы (5), но тем не менее нули w заполняют тот отрезок прямой $x = \frac{1}{2}$, который принадлежит области G.

Если регулярные решения системы

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a(z)\, e^{-w}, \tag{7}$$

где $a(z)$ — голоморфная в G функция, определить так же, как выше, то аналогично получим следующее представление этих решений:

$$w(z) = \log(\varphi(z) + a(z)\cdot\bar{z}), \tag{8}$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная в G функция, а $\log$ обозначает однозначную ветвь логарифма.

3. В этом пункте регулярные решения систем (1), (3) и (7) рассматриваются во всей (открытой) плоскости E. Из формул (2), (4) и (8) представления решений этих систем видно, что несуществование или существование непрерывных во всей плоскости решений этих систем определяется тем, — имеет или не имеет корни уравнение

$$\varphi_0(z) - \varphi_1(z)\cdot\bar{z} = 0, \tag{9}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ — целые функции. Ясно, что уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$f(z) - \bar{z} = 0, \tag{10}$$

где $f(z)$ — мероморфная в E функция. Верна следующая:

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — мероморфная в E функция, отличная от линейной функции и от мероморфной функции, имеющей в E единственный простой полюс, и пусть $f(o) \neq \infty$. Тогда уравнение*

$$f(z) - \bar{z} = 0 \tag{11}$$

имеет корень[1].

Обозначим, как обычно, через $n(t, a)$ — число корней (с учетом кратности) уравнения $f(z) - a = 0$ в круге $|z| < t$. Ясно, что уравнение (11) эквивалентно уравнению $f_0(z) = |z|^2$, где $f_0(z) = zf(z)$. При малых $r > 0$ величина $n(r, r^2)$ равна кратности p нулевого корня функции $f_0(z)$. Будем считать, что $p = 1$, ибо при $p > 1$ имеем $f(o) = 0$, и теорема очевидна. Если мы покажем, что при каком-нибудь $r = R$ справедливо неравенство $n(R, R^2) > 1$, то в силу непрерывной зависимости корней уравнения $f_0(z) = r^2$ (r — не обязательно равен $|z|$) от параметра r на интервале $0 < r < R$ найдется такое значение $r = r_1$, что на окружности $|z| = r_1$ окажется корень уравнения $f_0(z) = r_1^2$, т. е. будет доказано существование корня уравнения (11).

Итак, нужно лишь доказать, что при некотором R верно $n(R, R^2) > 1$, а это доказывается на основании теории мероморфных функций Неванлина ([1])[2].

---

[1] Идею доказательства этой теоремы мне указал Б. Я. Левин, которому я выражаю искреннюю благодарность.

[2] Если $f(z)$ — линейная функция, то простой пример показывает, что теорема 4 неверна. В самом деле, положим $f(z) = z(z+2)$, т. е. $f_0(z) = z + 2$. Ясно, что уравнение $z + 2 - \bar{z} = 0$ не имеет корней.

Положим теперь, $f(z) = \dfrac{bz}{z+a}$, т. е. $f_0(z) = \dfrac{b}{z+a}$, где a и b постоянные комплексные числа, причем $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, b_1 — отрицательное число и $|b_1| > \dfrac{a_1^2 + a_2^2}{4}$. Уравнение $\dfrac{b}{z+a} - \bar{z} = 0$ также не имеет решений.

Из теоремы 4 сразу получается следующая теорема.

Теорема 5. *Системы* (1), (3) *и* (7), *коэффициент* $a(z)$ *которых—целая функция, могут иметь решения непрерывных во всей (открытой) плоскости лишь в том случае, если отношение* $a(z)$ *к целой функции* $\varphi(z)$, *участвующей в представлении решения, является линейным или обратным к линейной функции.*

4. Здесь мы сформулируем две теоремы о решениях уравнения

$$\Delta u = k(x, y)\, e^{u(x, y)} \qquad \left(\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right), \tag{12}$$

где $\log k(x, y)$ — гармоническая функция в некоторой области G, которые являются простыми обобщениями теоремы Ниче.

Теорема 6. *Пусть действительная функция* $u(x, y)$ *дважды непрерывно дифференцируема в кольце* $0 < x^2 + y^2 \leqslant r^2$ *и является там решением дифференциального уравнения* (12), *тогда* $u(x, y)$ *в окрестности нулевой точки или дважды непрерывно дифференцируема, или имеет одно из следующих представлений*

1°. $u(x, y) = (p - 1)\log(x^2 + y^2) + \Phi(x, y) - \log k(x, y) \qquad p > 0$

2°. $u(x, y) = -\log(x^2 + y^2) - 2\log|\log(x^2 + y^2)| + \psi(x, y) - \log k(x, y)$,

где $\Phi(x, y)$ *и* $\psi(x, y)$ *в круге* $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ *непрерывные и в кольце* $0 < x^2 + y^2 \leqslant r^2$ *аналитические функции, причем при приближении к нулевой точке*

$$\Phi_x,\ \Phi_y = O(\rho^{2p-1}),$$

$$\psi_x,\ \psi_y = O(\rho^{-1}|\log^{-2}\rho|),$$

$$\Phi_{xx_1},\ \Phi_{xy_1},\ \Phi_{yy} = O(\rho^{+2p-2}),$$

$$\psi_{xx_1},\ \psi_{xy_1},\ \psi_{yy} = O(\rho^{-2}|\log^{-2}\rho|),$$

(где $\rho^2 = x^2 + y^2$).

Теорема 7. *Пусть действительная функция* $u(x, y)$ *регулярная в круге* $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ *и является там решением дифференциального уравнения* (12). *Тогда справедливо неравенство*

$$r \leqslant \sqrt{\frac{8}{\exp(u(o, o) + k(o, o))}}.$$

5. Если воспользоваться теоремами 6 и 7 и определять регулярные решения системы

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a \cdot e^{\overline{F(z)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\overline{w}(z)}, \tag{13}$$

где $a = \mathrm{const}$, $F(z)$ — голоморфная функция в G, так же как для систем (1), то получаются следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть* $w(z)$, *регулярное*[1] *в кольце* $o < |z| \leqslant r$ *решение системы* (13), *тогда в нулевой точке* $w(z)$ *или регулярное или имеет один из следующих представлений*

$$1^\circ. \qquad w(z) = (k-1)\log z\bar{z} + \Phi(z)$$

$$2^\circ. \qquad w(z) = -\log z\bar{z} - 2\log|\log z\bar{z}| + \psi(z),$$

где $\mathrm{Re}\Phi(z)$ *и* $\mathrm{Re}\psi(z)$ *непрерывные в круге* $|z| < r$ *однозначные функции, а* $\mathrm{Im}\Phi(z)$ *и* $\mathrm{Im}\psi(z)$ *(вообще многозначные) гармонические функции в кольце* $o < |z| \leqslant r$.

Теорема 9. *Пусть* $w(z)$ *регулярное в круге* $|z| < r$ *решение системы* (13), *тогда справедливо неравенство*

$$r < \sqrt{\frac{8}{\exp\left(\overline{ReF(o)} + \overline{Rew(o)}\right)}}\ .$$

Из теоремы (9) следует, что система (13), где $F(z)$ целая функция, не может иметь непрерывных во всей плоскости решений.

6. Аналогичным образом доказывается, что и система

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a \cdot e^{\bar{F}(z)} \cdot e^{-\frac{1}{2}w(z)},$$

где $a = \mathrm{const}$, $F(z)$ — целая функция, не имеет бесконечно дифференцируемых во всей плоскости решений. При доказательстве используется отсутствие бесконечно дифференцируемых во всей плоскости решений уравнения (3)

$$\Delta u = e^{-u}.$$

Настоящая работа выполнена под руководством Б. В. Шабата, которому автор приносит глубокую благодарность.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Մասնական ածանցյալներով հավասարումների սիստեմների լուծումների խզման մասին

Դիտարկվում են հետևյալ տիպի սիստեմները

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = aw^n, \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = ae^{w}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = ae^{-w},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a_0 e^{\bar{F}(z)} \cdot e^{\frac{1}{2}\bar{w}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a_0 e^{\bar{F}(z)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\bar{w}},$$

որտեղ $a(z)$ *և* $F(z)$ *ամբողջ ֆունկցիաներ են,* $a_0 = \mathrm{const}$.

Ապացուցվում է, որ այս սիստեմները ամբողջ հարթության վրա չունեն անվերջ անգամ դիֆերենցելի լուծումներ:

---

[1] Нам придется рассматривать многозначные решения системы (13). Для наших целей достаточно ограничиться лишь таким случаем, когда в любой точке области все ветви многозначной функции имеют одну и ту же производную. Эту производную мы будем называть производной рассматриваемой функции.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Неванлина,* Однозначные аналитические функции. М.–Л., 1941. [2] *Nitsche,* Math. Zeitschrift, vol. 68, 316 (1957). [3] *А. А. Гальдберг,* Известия высших учебных заведений, № 3 (4), 1958.