ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVI 1963 5

МАТЕМАТИКА

Н. Д. Пецко

Бикватернионные эллиптические пространства и их применение к вещественным геометриям

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 26/XI 1962)

Н. Т. Аббасов ([1]) определил бикомплексные эллиптические пространства над бикомплексными числами $a+bi$, где a, b — комплексные числа $\alpha+\beta I$, а в работе ([2]) определил бикватернионные эллиптические пространства над бикватернионами $a+bi+cj+dk$, где a, b, c, d — комплексные числа (см. также ([3])). В настоящей работе мы рассматриваем бикомплексные бикватернионные эллиптические пространства над бикомплексными числами и бикватернионами, где a, b, c, d — комплексные числа вида $\alpha+\beta I$, двойные числа вида $\alpha+\beta I$, $E^2=+1$ и дуальные числа $\alpha+\beta\varepsilon$, $\varepsilon^2=0$, единицы, I, E и ε которых перестановочны с единицами i, j, k. Эти пространства являются частными случаями неевклидовых пространств над алгебрами, изучавшимися М. А. Джавадовым ([4]).

Комплексные кватернионы образуют кольцо, изоморфное полному кольцу комплексных матриц второго порядка, двойные и дуальные кватернионы образуют кольца, изоморфные кольцам бикомплексных матриц второго порядка, причем изоморфизм устанавливается соответствием

$$a+bi+cj+dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

Будем обозначать кольца бикомплексных чисел, соответственно, $R(i, I)$, $R(i, E)$ и $R(i, \varepsilon)$, а кольца бикватернионов, соответственно, $R(i, j, I)$, $R(i, j, E)$ и $R(i, j, \varepsilon)$.

В кольцах $R(i, I)$, $R(i, E)$ и $R(i, \varepsilon)$ можно определить три вида бикомплексных чисел, сопряженных с числом $A=a+bi$, $\bar{A}=a-bi$, $\tilde{A}=\bar{a}+\bar{b}i$, $\bar{\bar{A}}=\bar{a}-\bar{b}i$, в кольцах $R(i, j, I)$, $R((i, j, E)$ и $R(i, j, \varepsilon)$ можно определить три вида бикватернионов, сопряженных с бикватернионом

$$A=a+bi+cj+dk:$$

$$\bar{A}=a-bi-cj-dk, \quad \tilde{A}=\bar{a}+\bar{b}i+\bar{c}j+\bar{d}k, \quad \bar{\bar{A}}=\bar{a}-\bar{b}i-\bar{c}j-\bar{d}k.$$

Эти преобразования являются инволюционными преобразованиями, причем все указанные преобразования в кольцах бикомплексных чисел являются автоморфизмами (например, $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$), а все указанные преобразования в кольцах бикватернионов являются антиавтоморфизмами (например, $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}$).

Н. Т. Аббасов ([1, 2]) определил n-мерные бикомплексные и бикватернионные проективные пространства $P_n(j, I)$ и $P_n(i, j, I)$ и эллиптические пространства $\overset{\approx}{S}_n(i, I)$ и $\overset{\approx}{S}_n(i, j, I)$ над кольцами $R(i, I)$ и $R(i, j, I)$. Заменяя в определении этих пространств кольцо $R(i, I)$ кольцами $R(i, E)$ и $R(i, \varepsilon)$, а кольцо $R(i, j, I)$ — кольцами $R(i, j, E)$ и $R(i, j, \varepsilon)$ мы определим n-мерные бикомплексные и бикватернионные проективные пространства $P_n(i, E)$, $P_n(i, \varepsilon)$, $P_n(i, j, E)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)$ и эллиптические пространства $\tilde{S}_n(i, E)$, $\tilde{S}_n(i, \varepsilon)$, $\overset{\approx}{S}_n(i, j, E)$ и $\overset{\approx}{S}_n(i, j, \varepsilon)$.

Группы проективных преобразований (коллинеаций и корреляций) пространств $P_n(i, E)$, $P_n(i, \varepsilon)$, $P_n(i, j, E)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)$ и группы движений пространств $\tilde{S}_n(i, E)$, $\tilde{S}_n(i, \varepsilon)$, $\tilde{S}_n(i, j, E)$ и $\overset{\approx}{S}_n(i, j, \varepsilon)$ определяются аналогично группам проективных преобразований пространств $P_n(i, I)$ и $P_n(i, j, I)$ и группам движений пространств $\overset{\approx}{S}_n(i, I)$ и $\overset{\approx}{S}_n(i, j, \varepsilon)$, определенных Н. Т. Аббасовым.

Теорема 1. *Пространство $P_n(i, j, I)$ допускает интерпретацию в виде многообразия прямых комплексного проективного пространства $P_{2n+1}(i)$*, причем группа проективных преобразований пространства $P_n(i, j, I)$ изоморфна группе проективных преобразований пространства $P_{2n+1}(i)$. При этой интерпретации всякой m-мерной плоскости бикватернионного пространства $P_n(i, j, I)$ соответствует $(2m-1)$-мерная плоскость комплексного пространства $P_{2n+1}(i)$.

Теорема 2. *Пространства $P_n(i, j, E)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)$ допускают интерпретации в виде конгруэнции прямых бикомплексного проективного пространства*, соответственно $P_{2n+1}(i, E)$ *и* $P_{2n+1}(i, \varepsilon)$, причем группы проективных преобразований пространств $P_n(i, j, E)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)$ изоморфны факторгруппам групп проективных преобразований пространств $P_{2n+1}(i, E)$ или $P_{2n+1}(i, \varepsilon)$, переводящих в себя каждую прямую конгруэнции. При этой интерпретации всякой m-мерной плоскости бикватернионных пространств $P_n(i, j, E)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)$ соответствует $(2m-1)$-мерная плоскость бикомплексного пространства, состоящая из прямых конгруэнции.

Теорема 3. *Пространство $\overset{\approx}{S}_n(i, j, I)$ допускает интерпретацию в виде многообразия прямых комплексного эллиптического пространства $\bar{S}_{2n+1}(i)$*, причем группа движений пространства $S_n(i, j, I)$ изоморфна группе движений пространства $\bar{S}_{2n+1}(i)$.

Теорема 4. *Пространства* $\tilde{S}_n(i, j, E)$ *и* $\tilde{S}_n(i, j, \varepsilon)$ *допускают интерпретации в виде конгруэнций прямых эллиптических пространств* $\tilde{S}_{2n+1}(i, E)$ и $\tilde{\tilde{S}}_{2n+1}(i, \varepsilon)$, причем группы движений пространств $\tilde{\tilde{S}}_n(i, j, E)$ и $\tilde{\tilde{S}}_n(i, j, \varepsilon)$, изоморфны факторгруппам групп движений пространств $\tilde{S}_{2n+1}(i, E)$ и $S_{2n+1}(i, \varepsilon)$, переводящим в себя конгруэнцию по подгруппам этих групп, переводящим в себя каждую прямую конгруэнции.

Эти теоремы являются аналогами известных теорем об интерпретации антикватернионного проективного пространства $P_n(i, e)$ в виде многообразия прямых действительного пространства P_{2n+1} комплексного и двойного проективного пространств $P_n(i)$ и $P_n(e)$ в виде линейных конгруэнций пространства P_{2n+1}, комплексного и кватернионного эллиптических пространств $\bar{S}_n(i)$ и $\bar{S}_n(i, j)$ в виде паратактических конгруэнций прямых эллиптических пространств S_{2n+1} и $\bar{S}_{2n+1}(i)$ и антикватернионного эллиптического пространства $\tilde{S}_n(i, e)$ – в виде многообразия прямых симплектического пространства Sp_{2n+1} (4).

Теорема 5. *Точки бикватернионной эллиптической прямой* $\tilde{S}_1(i, j, I)$ *можно взаимно однозначно отобразить на прямые 5-мерного эллиптического пространства* S_5, причем группы движений $\tilde{S}_1(i, j, I)$ и S_5 изоморфны, а метрические инварианты двух точек $\tilde{S}_1(i, j, I)$ совпадают с метрическими инвариантами соответственных прямых S_5.

Теорема 6. *Точки бикватернионной эллиптической прямой* $\tilde{S}_1(i, j, E)$ *можно взаимно однозначно отобразить на гиперболические прямые 5-мерного гиперболического пространства* ${}^1S_5$, причем группы движений пространств $\tilde{\tilde{S}}_1(i, j, I)$ и ${}^1S_5$ изоморфны, а метрические инварианты двух точек $\tilde{S}_1(i, j, I)$ совпадают с метрическими инвариантами соответственных прямых ${}^1S_5$.

Теорема 6 вытекает из того, что точки прямой $\tilde{S}_1(i, j, E)$ в силу теоремы 4 изображаются прямыми конгруэнции в пространстве $\tilde{S}_3(i, E)$, а прямые этой конгруэнции в силу интерпретации, аналогичной интерпретации Плюккера, изображаются точками абсолюта пространства ${}^1S_5(e)$, которые, как показано в нашей работе (7), изображают гиперболические прямые пространства ${}^1S_5$. Эта же теорема может быть получена и благодаря изображению точек прямой $\tilde{S}_1(i, j, E)$ парами точек проективной прямой $P_1(i, j)$, которую можно рассматривать как расширенное пространство кватернионов, а пары точек этого пространства в силу интерпретации Штуди (5) изображаются парами точек абсолюта пространства ${}^1S_5$, т. е. гиперболическими прямыми этого пространства; при этом группа движений прямой $\tilde{S}_1(i, j, E)$, группа проективных преобразований прямой $P_1(i, j)$, которую можно рассматривать как группу дробно-линейных преобразований кватернионов, и группа движений пространства ${}^1S_5$ изоморфны.

Теорема 7. *Точки бикватернионной эллиптической прямой $\tilde{S}_1(i, j, \varepsilon)$ можно взаимно однозначно отобразить на прямые 5-мерного евклидова пространства R_5,* причем группы движений пространств $\tilde{S}_1(i, j, \varepsilon)$ и R_5 изоморфны, а метрические инварианты двух точек $\tilde{S}_1(i, j, \varepsilon)$ совпадают с метрическими инвариантами соответственных прямых пространства R_5.

Теорема 7 вытекает из того, что точки прямой $\tilde{S}_1(i, j, \varepsilon)$ в силу теоремы 4 изображаются прямыми конгруэнции в пространстве $\tilde{S}_3(i, \varepsilon)$, а прямые этой конгруэнции в силу интерпретации, аналогичной интерпретации Плюккера, изображаются точками абсолюта пространства ${}^1S_5(\varepsilon)$, которые, как показано в нашей работе [7], изображают прямые пространства R_5.

Коломенский педагогический
институт

Ն. Դ. ՊԵՑԿՈ

Երկկվատերնիոնային էլիպսական տարածությունը և նրա կիրառությունը իրական երկրաչափությունում

Աշխատանքում սահմանվում է էլիպսական տարածություն երեք տիպի երկկվատերնիոնների վրա՝ այսինքն կվատերնիոնների վրա, որոնց կոորդինատները հանդիսանում են ինչպես սովորական կոմպլեքս թվերը, այնպես և կրկնակի և դուալ թվերը: Մինչև հիմա հետազոտվել է միայն առաջին կարգի երկկվատերնիոնային էլիպսական երկրաչափությունը:

Կառուցված է այդ տարածությունների երկրաչափության հիմնական փաստերը: Առաջին տարածությունը մեկնաբանվում է կոմպլեքս-էլիպսական տարածությունում ուղիղների բազմաձևության տեսքով, իսկ երկրորդ և երրորդ տարածությունները մեկնաբանվում են երկկվատերնիոնային էլիպսական տարածությունում երկու տեսակի ուղիղների կոնգրուենցիայի տեսքով: Հատուկ հետազոտվում է երկկվատերնիոնային էլիպսական ուղիղները:

Ապացուցվում է, որ այդ ուղիղների կետերը փոխադարձ միարժեք արտապատկերվում են ուղիղների վրա համապատասխանաբար հինգ չափանի, իրական էլիպսական, հիպերբոլական և էվկլիդյան տարածության, ընդորում երկկվատերնիոնային ուղիղների և իրական տարածության շարժման խմբերը իզոմորֆ են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Т. Аббасов*, Бикомплексные эллиптические пространства, ученые записки Азербайджанского гос. университета, № 2, 1962. [2] *Н. Т. Аббасов*, Бикватернионные эллиптические пространства, ученые записки Азербайджанского гос. университета, № 6, 1962. [3] *Б. А. Розенфельд*, Образы простоты и полупростоты. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 12, стр. 269—285, 1962. [4] *М. А. Джавадов*, Неевклидовы геометрии над алгебрами. Ученые записки Азербайджанского гос. университета, № 4, 1957. [5] *Б. А. Розенфельд*, Неевклидовы геометрии, стр. 495—500, М., 1955. [6] *Б. И. Семянистый*, Об изометричности пространств $K_1(i)$ и S_3. Ученые записки Грозненского гос. педагогического института, № 7, физ.-мат. серия, вып. 4, 1956. [7] *Н. Д. Пецко*, Проективные мероопределения и комплексные числа.