ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 4

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Г. И. Тер-Степанян

Графический и графо-аналитический методы расчета цепных номограмм с параллельными шкалами

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 20/XII 1962)

Статическая аналогия. Для цепных номограмм с параллельными шкалами существует следующая статическая аналогия: „если рассматривать цепную номограмму с параллельными шкалами как невесомое твердое тело, а коэффициенты шкал заданных функций независимых переменных как параллельные силы, приложенные к этому телу, то коэффициент шкалы функции зависимой переменной может рассматриваться как равнодействующая всех приложенных сил".

Эта аналогия вытекает из установленного автором одного общего свойства номограмм с параллельными шкалами для функции многих переменных ([1]).

В настоящей работе описываются графический и графо-аналитический методы расчета цепных номограмм с параллельными шкалами, основанные на применении веревочного многоугольника. Хотя эти методы и могут быть применены к любому уравнению с n переменными, относящемуся ко второй канонической форме уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i) = f_n(u_n), \tag{1}$$

где u_i $(i = 1, 2 \cdots n-1)$ заданные независимые переменные, u_n — зависимая переменная, а f_i $(i = 1, 2 \cdots n)$ — непрерывные монотонные функции, разрешаемому в номограммах с параллельными шкалами, практически целесообразно применять их только к уравнениям, приводящимся к этому виду путем логарифмирования; как известно, в этих случаях шкалы имеют логарифмическую характеристику, что позволяет прибегнуть к логарифмическим шаблонам или даже к логарифмическим счетным линейкам для градуировки таких шкал.

Графический метод. Рассмотрим применение метода к уравнению, имеющему простой вид:

$$\frac{u_1 u_2 u_3 \ldots}{u_k u_{k+1} \ldots} = u_n,$$

которое после логарифмирования приводится к

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \cdots - \lg u_k - \lg u_{k+1} - \cdots = \lg x_n .$$

Здесь u_i — независимые переменные или их простые тригонометрические функции, непрерывные и монотонные в заданных пределах изменения переменных. Градуирование шкал этих функций может быть произведено графическим методом, путем копирования соответствующих участков логарифмических линеек. В табл. 1 приведены значения коэффициентов шкал различных логарифмических линеек.

Таблица 1

Коэффициенты шкал логарифмических линеек в $см^{-1}$

Тип линеек	Длина шкалы, *см*	Шкалы			
		нормальная	квадратичная	кубичная	тригонометрическая
Прецизионная	100	0,01	0,02	0,03	0,01
Большая	50	0,02	0,04	0,06	0,02
Обыкновенная	25	0,04	0,08	0,12	0,04
Карманная	15	0,067	0,133	0,20	0,067
Карманная	12,5	0,08	0,16	0,24	0,08

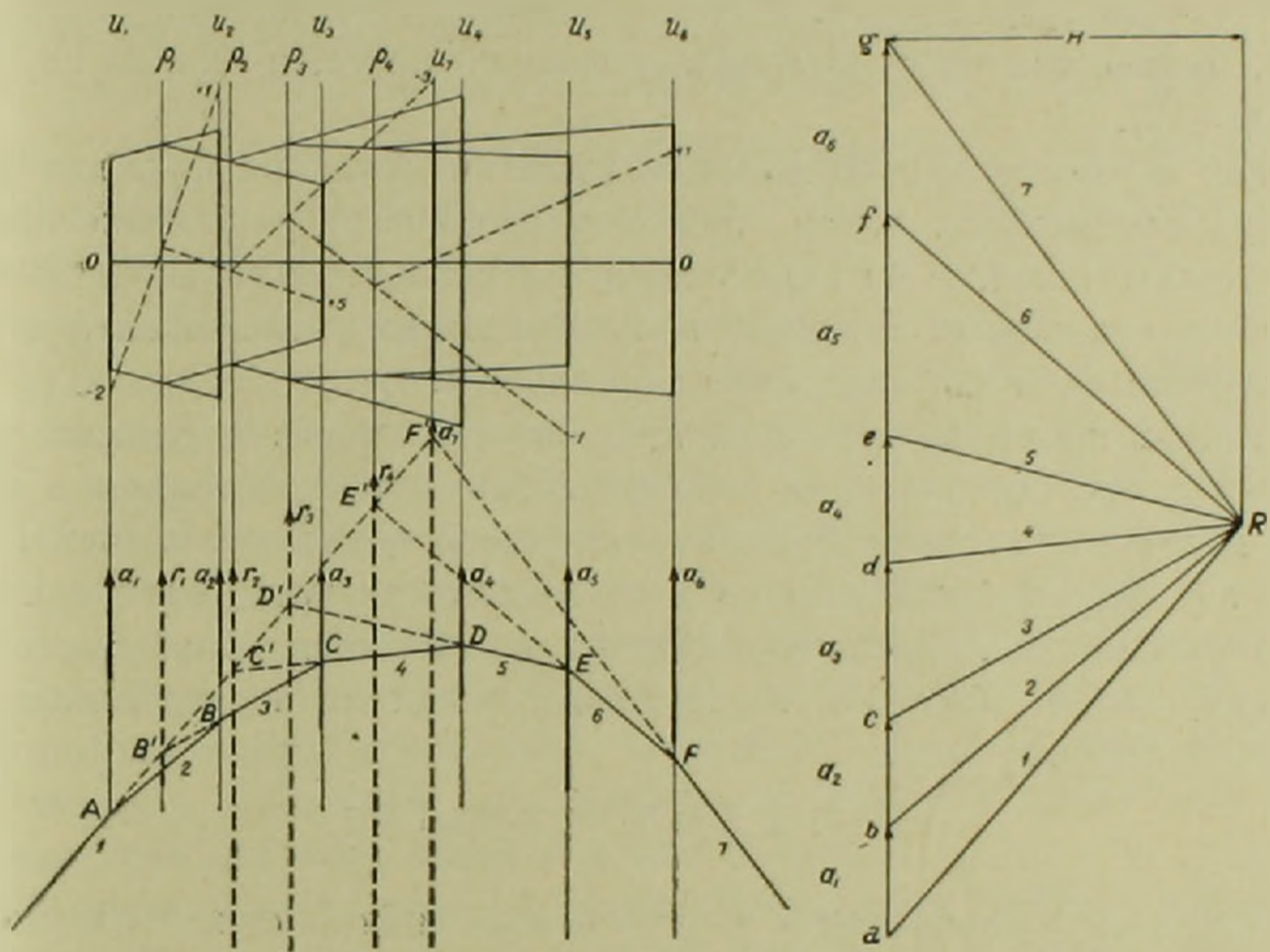
Назначаем коэффициенты шкал каждой из функций независимых переменных, руководствуясь заданными пределами изменения этих переменных, имеющимся набором логарифмических линеек и желательными размерами номограммы; кроме того, подберем коэффициенты шкал таким образом, чтобы сумма коэффициентов шкал заданных функций также отвечала коэффициенту шкалы одной из имеющихся линеек. (Не обязательное условие, так как применением графических методов можно получить логарифмическую шкалу, обладающую любым коэффициентом шкалы).

На поле чертежа располагаем вертикальные линии—носители шкал заданных функций независимых переменных. При их размещении руководствуемся соображениями наилучшего использования места. Полученный чертеж представляет собой поле сил (фиг. 1*а*).

Отдельно строим вертикальную прямую, на которой в выбранном масштабе последовательно откладываем коэффициенты шкал заданных функций независимых переменных (фиг. 1*б*). На произвольном расстоянии H выбираем точку R и соединяем ее с концами отрезков, представляющими коэффициенты шкал функций. Полученное построение представит собой план сил. Затем на поле сил строим веревочный многоугольник, проводя его через произвольную точку на первой вертикальной линии—носителе шкалы первой функции независимой переменной.

Точки пересечения первого луча с каждым последующим лучем будут лежать на вертикалях, через которые должны быть проведены носители шкал вспомогательных переменных, а точка пересечения этого же луча с последним лучем определит собой положение носителя шкалы функции зависимой переменной.

С целью увеличения угла, образуемого крайними диагональными положениями разрешающей прямой с направлениями шкал, целесообразно центрировать шкалы номограммы, иными словами, располагать их в поле чертежа таким образом, чтобы середины их лежали на одной прямой, перпендикулярной к носителям шкал. Как известно, чем острее угол встречи разрешающей прямой с отметкой шкалы, тем больше геометрическая погрешность нахождения ответной точки.



Фиг. 1

Зная коэффициенты шкал функции, выбираем соответствующие шкалы логарифмических линеек, находим на них пометки точек, отвечающие заданным пределам переменных, и измеряем масштабной линейкой расстояние между этими пометками. Они представят собой длины шкал.

На чертеже (поле сил) проводим прямую OO, перпендикулярную к направлению шкал, и откладываем на носителях шкал полученные длины шкал заданных функций независимых переменных так, чтобы середины шкал пришлись на этой прямой (фиг. 1*а*).

Для того чтобы копировать шкалы, достаточно знать пометки хотя бы одной из точек на каждой шкале. Такими точками являются концы шкал, отвечающие заданным пределам переменных.

Одновременно помечаем на носителе шкал положение *начала логарифмических шкал*, с которых производится копирование, и надписываем около этих точек значения логарифмической функции. Если, например, градуируется шкала функции $\lg x$, коэффициент шкалы которой равен 0,02 и пределы изменения переменной $400 < x < 750$, то берем нормальную шкалу большой линейки (табл. 1), находим на ней пометки 4 и 7,5 и с помощью масштабной линейки измеряем расстояние между этими точками (13, 65 *см*); эту длину шкалы делим пополам и откладываем на обе стороны от центральной линии ОО; получаем концы шкалы. Затем копируем участок линейки, заключенный между пометками 4 и 7,5. Кроме этого, показываем на носителе шкалы точку, отвечающую пометке 1 (начало логарифмической шкалы), *независимо* от того, находится ли эта точка в пределах интересующего нас участка (от 4 до 7,5) или нет. Рядом с точкой, отвечающей началу линейки, пишем значение логарифмической функции, в данном случае 2 ($\lg 100 = 2$).

Так же поступаем со всеми остальными шкалами функции независимых переменных. Затем проводим крайние разрешающие прямые через концы шкал, и на пересечении их с носителями шкал соответствующих суммарных функций получаем концы этих шкал функций, в том числе функции зависимой переменной.

Теперь проводим разрешающие прямые через сделанные нами пометки точек, отвечающие началам логарифмических шкал, и получаем на носителе шкалы функции зависимой переменной точку. Значение логарифмической функции в этой точке получаем алгебраическим суммированием значений, надписанных на носителях шкал слагаемых функций. Так, на фиг. 1*а* это значение получено в результате следующего суммирования:

$$-2 + 1 + 5 - 3 - 1 + 1 = +1.$$

Наконец, прикладываем в полученной точке начало логарифмической линейки, коэффициент шкалы которой равен сумме коэффициентов шкал слагаемых функций, и производим копирование градуировки участка между концами шкалы функции зависимой переменной. Для получения пометок точек этой шкалы принимаем в расчет значение логарифмической функции в точке, где приложено начало логарифмической линейки. Так, если логарифмическая функция в такой точке имела значение „+1", как на фиг. 1*а*, то пометка этой точки равна 10, соответственно получаются пометки и остальных точек.

Графо-аналитический метод. Если номографируемое уравнение имеет более общий вид:

$$[F_1(u_1)]^{m_1} [F_2(u_2)]^{m_2} \cdots [F_{n-1}(u_{n-1})]^{m_{n-1}} = F_n(u_n),$$

где $u_i (i = 1, 2 \cdots n-1)$ заданные независимые переменные, u_n — зависимая переменная, $m_i (i = 1, 2 \cdots n-1)$ любые положительные или отрицательные числа, а $F_i (i = 1, 2 \cdots n)$ линейные или тригонометрические функции, непрерывные и монотонные в заданных пределах изменения переменных, то оно путем логарифмирования приводится к виду (1).

где $$f_i(u_i) = m_i \lg F_i(u_i) \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

В этом случае удобнее прибегнуть к графо-аналитическому методу.

Предварительно по заданным пределам изменения переменных $(u_i)_1$ и $(u_i)_2$ должны быть вычислены наименьшее $f_i(u_i)_1$ и наибольшее $f_i(u_i)_2$ значения функций независимых переменных. Наименьшее значение функции соответствует проксимальному пределу переменной, а наибольшее ее значение—дистальному пределу переменной. Затем вычисляются интервалы A_i функций независимых переменных $f_i(u_i)$, назначаются величины графических коэффициентов шкал e_i согласно табл. 1, вычисляются расчетные коэффициенты шкал a_i и определяются длины h_i этих шкал. Действия удобно производить в таблице (столбцы 1—11) (табл. 2). Аналогичные величины для шкалы функции зависимой переменной $f_n(u_n)$ получаются суммированием в том порядке, как это показано в нижней строке таблицы.

Для контроля правильности расчета вычисляется интервал A_n функции зависимой переменной, как разность наибольшего и наименьшего значений функции этой переменной, и полученный результат сравнивается с величиной интервала этой функции, полученной путем суммирования значений интервалов функций независимых переменных.

Затем можно перейти к построениям описанным выше методом. Контролем правильности построения является совпадение концов шкалы функции зависимой переменной, полученной путем непосредственного построения и найденной при проведении крайних положений разрешающих прямых всех звеньев номограммы.

Градуирование шкал функции производим описанным способом. Если уравнение имеет самый общий вид (1), то градуирование шкал придется вести по уравнениям. В этом случае в табл. 2 должны быть вычислены также уравнения шкал (столбец 12).

При построении цепной номограммы графическим или графо-аналитическим методами целесообразно идти обратным путем—вначале построить план сил, а затем перейти к полю сил и последовательно строить линии носителей шкал, выбирая их положение таким образом, чтобы удобнее разместить носители шкал вспомогательных переменных и функции зависимой переменной. В частности, таким путем можно легко осуществить частичное слияние носителей шкал вспомогательных переменных с носителями шкал функции независимых переменных и, устранив таким образом часть немых шкал, добиться компактности номограммы и лучшего использования площади чертежа, без ущерба для точности.

Для слияния носителя шкалы любой вспомогательной переменной с носителем шкалы функций независимой переменной следует на поле сил через точку пересечения первого луча с носителем шкалы функции независимой переменной провести луч, соответствующий коэффициенту шкалы этой суммарной вспомогательной переменной, и вести

Таблица 2

Алгорифм к графо-аналитическому методу построения цепных номограмм с параллельными шкалами

Переменные	Вид функции	Пределы переменных		Значения функции		Показатель степени	Интервал функции	Коэффициент шкалы		Длина шкалы	Уравнение шкалы
		проксимальный	дистальный	наименьшее	наибольшее			графический	расчетный		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_i	$f_i(u_i)$	$(u_i)_1$	$(u_i)_2$	$f_i(u_i)_1$	$f_i(u_i)_2$	m_i	$A_i = f_i(u_i)_2 - f_i(u_i)_1$	e_i	$a_i = e_i m_i$	$h_i = \frac{A_i}{a_i}$	$y_i = \frac{f_i(u_i) - f_i(u_i)_1}{a_i}$
u_n	$f_n(u_n)$	$(u_n)_1$	$(u_n)_2$	$f_n(u_n)_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_1$	$f_n(u_n)_2 = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(u_i)_2$	1	$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i$	$e_n = a_n$	$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$	$h_n = \frac{A_n}{a_n}$	$y_n = \frac{f_n(u_n) - f_n(u_n)_1}{a_n}$
Контроль		—	—	—	—	—	$A_n = f_n(u_n)_2 - f_n(u_n)_1$	—	—	—	—

этот луч на поле сил до пересечения с предыдущим лучом. Точка пересечения указанных двух лучей определит собой положение носителя шкалы соответствующей функции независимой переменной.

ԳԵՈՐԳ ՏԵՐ-ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Զուգահեռ սանդղակներով շղթայական նոմոգրամների հաշվման գրաֆիկ և գրաֆո-անալիտիկ եղանակ

Հեղինակը հաստատել է հետևյալ անալոգիան. «Եթե զուգահեռ սանդղակներով շղթայական նոմոգրամը դիտարկել է որպես անկշիռ կարծր մարմին, իսկ տրված անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների սանդղակների գործակիցները որպես զուգահեռ ուժերի սիստեմ կիրառված այդ մարմնի վրա, ապա կախյալ փոփոխականի սանդղակի գործակիցը կարելի է դիտել որպես բոլոր կիրառված ուժերի համազորը»։

Այս անալոգիան հեղինակին հնարավորություն է տալիս մշակելու զուգահեռ սանդղակներով շղթայական նոմոգրամների հաշվման պարանային բազմանկյան օգտագործման վրա հիմնված գրաֆիկ և գրաֆո-անալիտիկ եղանակ։

Թեպետև այս եղանակները կարող են օգտագործվել n-փոփոխականներով հավասարումների երկրորդ կանոնիկական ձևին վերաբերվող, զուգահեռ սանդղակներով նոմոգրամների լուծելիս կամայական հավասարման նկատմամբ, բայց պրակտիկորեն նպատակահարմար է նրանց օգտագործել այն հավասարման նկատմամբ, որոնք լոգարիթմելու ճանապարհով վերածվում են այդ ձևին։ Այս դեպքում հնարավոր է օգտագործել ֆունկցիաների սանդղակների ստուգանավորման գրաֆիկ եղանակը։

Տրված անկախ փոփոխականների զուգահեռ սանդղակները կամայականորեն դասավորվում են գծագրի հարթության վրա և կատարվում է սանդղակների գործակիցների, որպես ուժերի գրաֆիկական գումարումը (գծ. 1), որի համար կառուցվում է պարանային բազմանկյունը։

Պարանային բազմանկյան առաջին ճառագայթի և յուրաքանչյուր հաջորդ ճառագայթի հատման կետերը գտնվում են ուղղաձիգների վրա, որոնցով անցնում են օժանդակ ֆունկցիաները կրող սանդղակները, իսկ վերջին ճառագայթի հատման կետը որոշում է կախյալ փոփոխական ֆունկցիան կրող սանդղակի դիրքը։

Կախյալ փոփոխականի ֆունկցիաների սանդղակի ծայրակետերի դիրքը որոշվում է տրված անկախ փոփոխականներով ֆունկցիաների սանդղակների համապատասխան ծայրակետերով անցնող հաջորդական լուծող ուղիների միջոցով։

Լոգարիթմական ֆունկցիաների հանրահաշվական գումարը ներկայացնող հավասարումների համար, շղթայական նոմոգրամների լուծման գրաֆիկ եղանակը կատարվում է առանձնահատուկ արդյունավետությամբ։

Գրաֆո-անալիտիկ մեթոդը կարող է գտնել օգտագործում ավելի բարդ հավասարումների համար նոմոգրամների դեպքում, այս եղանակում որպես հավելացում գրաֆիկական կառուցման (գծ. 1.) կազմած է կախյալ փոփոխականներով ֆունկցիաների սանդղակների հիմնական պարամետրների հաշվման աղյուսակը։

Աշխատանքում ցույց է տրված օժանդակ ֆունկցիաների սանդղակների և տրված անկախ փոփոխականներով ֆունկցիաների սանդղակների միաձուլման եղանակը, նաև հաշվման և կառուցման ստուգման եղանակը, հիմնված զուգահեռ առնչությունների օգտագործման վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Н. Тер-Степанян*, Об одном общем свойстве номограмм с параллельными шкалами для функции многих переменных. ДАН АрмССР, 1950, 12 (1): 3—8.