ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVI 1963 4

МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсесян

Об одной задаче для дифференциально-функциональных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 19/XII 1962)

Для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом задачи с начальными данными рассматривались в основном лишь в случае „односторонних“ отклонений аргумента (запаздывание или опережение). В подавляющем большинстве случаев ставилась так называемая основная начальная задача*, степень корректности которой примерно такая же, как и у начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Корректность иных начальных задач, как правило, требует жестких ограничений на уравнение и сужения класса функций, в котором ищется решение. По-видимому, первый (если не единственный) результат в этом направлении получен Доссом и Насром ([2]). А. Б. Штыкан ([3]) предложил метод графического интегрирования для более общих задач, однако в работе ([4]) А. М. Зверкин, Г. А. Каменский и С. Б. Норкин показали, что, вообще говоря, применение подобных приближенных методов недопустимо без строгого обоснования и, в то же время, предложили несколько иных интересных вариантов начальных задач.

В предлагаемой работе сделана попытка общего подхода ко всем упомянутым выше задачам при отсутствии каких-либо существенных ограничений на характер отклонений аргумента.

§ 1. *Постановка задачи. Теорема существования.* 1°. Пусть оператор $V(x, \varphi)=\{V_k\}_1^n$ $(-\infty\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta<+\infty,\ n\geqslant 1)$ определен на множестве кусочно-непрерывных ограниченных вектор-функций $\varphi(t)=\{\varphi_k(t)\}_1^n$ $(a\leqslant t\leqslant b,\ a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b,\ \varphi(t)=\varphi(t-0),\ \varphi(\alpha)=\varphi(\alpha+0))$ и функции $|V_k(x, \varphi)|$ интегрируемы на (α, β).

Наложим на V следующее ограничение, аналогичное условию Липшица

---

* Относительно постановки основной начальной задачи см. обзорную статью ([1]), § 1.

$$|V_k(x, \varphi) - V_k(x, \psi)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_a^b |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|\, d\rho_{ik}(x, t), \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta) \tag{1}$$

$$\varphi = \{\varphi_k\}_1^n, \quad \psi = \{\psi_k\}_1^n, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

(интегрирование производится по t), где ρ_{ik}—неубывающие по t функции, не зависящие от φ и ψ, и все функции

$$\int_a^b d\rho_{ik}(x, t) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1'}$$

интегрируемы по x на (α, β).

На отрезках $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ соответственно зададим однопараметрические семейства кусочно-непрерывных ограниченных вектор-функций $\varphi(t, c) = \{\varphi_k\}_1^n$ и $\psi(t, c) = \{\psi_k\}_1^n$ $(-\infty < c < +\infty)$, компоненты которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} |\varphi_k(t, c_1) - \varphi_k(t, c_2)| \leqslant \Phi_k(t)\, |c_1 - c_2|, \quad \varphi_k(\alpha, c) = c \\ \int_a^\alpha \Phi_k(t)\, dt < +\infty \quad (a \leqslant t \leqslant \alpha, \quad k = 1, 2, \cdots, n) \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} |\psi_k(t, c_1) - \psi_k(t, c_2)| \leqslant \Psi_k(t)\, |c_1 - c_2|, \quad \Psi_k(\beta, c) = c \\ \int_\beta^b \Psi_k(t)\, dt < +\infty, \quad (\beta \leqslant t \leqslant b, \quad k = 1, 2, \cdots, n). \end{gathered} \tag{3}$$

Случай $\alpha = a$ (или $\beta = b$) не исключается из рассмотрения: просто в этом случае семейство $\varphi(t, c)$ (или $\psi(t, c)$) вырождается в семейство точек с абсциссой α (или β), и необходимость в условиях (2) (или (3)) отпадает.

Определим теперь оператор $V_c(x, \xi)$, $(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ на функциях $\xi(t) = \{\xi_k\}_1^n$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ следующим образом:

$$V_c(x, \xi) = V(x, \xi^*), \qquad \xi^* = \{\xi_k^*\}_n^1, \tag{4}$$

где

$$\xi_k^*(t) = \begin{cases} \xi_k(t) & \text{при} \quad \alpha < t < \beta \\ \varphi_k(t, c), \quad c = \xi_k(\alpha) & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant \alpha \\ \psi_k(t, c), \quad c = \xi_k(\beta) & \text{при} \quad \beta \leqslant t \leqslant b \end{cases} \tag{4'}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

Задача, рассматриваемая в дальнейшем, ставится так: ищется абсолютно непрерывная вектор-функция $y(x)=\{y_k(x)\}_1^n$ $(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$, производная которой почти всюду на (α, β) удовлетворяет уравнению

$$y'(x)=V_c(x, y) \tag{5}$$

и

$$y(x_0)=y^0, \quad \alpha\leqslant x_0\leqslant\beta, \quad y^0=\{y_k^0\}_1^n$$
$$(-\infty<y_k^0<+\infty, \quad k=1, 2,\cdots, n). \tag{6}$$

Уравнение (5) является общим дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом, причем функции ρ_{ik} в условии (1) точно характеризуют отклонения. Если $x_0=\alpha$ (или $x_0=\beta$), то из семейства $\varphi(x, c)$ (или $\psi(x, c)$) автоматически выбирается одна функция и нетрудно видеть, что в этом случае постановка основной начальной задачи для уравнений с запаздыванием (или опережением) входит в схему задачи (5)–(6).

2. Обозначим

$$R_k(x)=\sum_{i=1}^n\left\{\int_a^\alpha\Phi_i(t)\,d\rho_{ik}(x, t)+\right.$$
$$\left.+\int_\beta^b\Psi_i(t)\,d\rho_{ik}(x, t)+\int_\alpha^\beta d\rho_{ik}(x, t)\right\} \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta, \ k=1, 2,\cdots,n). \tag{7}$$

Теорема 1. *Задача* (5)—(6) *имеет единственное решение, если*

$$\left|\int_{x_0}^x R_k(t)\,dt\right|\leqslant\theta<1 \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta, \ k=1, 2,\cdots, n). \tag{8}$$

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы оператор

$$Ly=y^0+\int_{x_0}^x V_c(t, y)\,dt \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta) \tag{9}$$

осуществляет сжатые отображения в классе непрерывных на $[\alpha, \beta]$ вектор-функций с обычной метрикой

$$\|\varphi\|=\max_k\max_t|\varphi_k(t)|, \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \quad \varphi=\{\varphi_k\}_1^n \tag{10}$$
$$(k=1, 2,\cdots, n).$$

Действительно, пусть $V_c=\{V_c^k\}_1^n$, тогда, обозначив

$$y_i(t)=\{y_k^i(t)\}_{k=1}^n \quad c_k^i=y_k^i(\alpha), \quad d_k^i=y_k^i(\beta)$$

$$(\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \cdots, n),$$

из (1)—(4) получим

$$| V_c^k(x, y_1) - V_c^k(x, y_2) | \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ | c_i^1 - c_i^2 | \int_{\alpha}^{\alpha} \Phi_i(t)\, d\rho_{ik}(x, t) + \right.$$

$$\left. + | d_i^1 - d_i^2 | \int_{\beta}^{b} \Psi_i(t)\, d\rho_{ik}(x, t) + \int_{\alpha}^{\beta} | y_k^1(t) - y_k^2(t) |\, d\rho_{ik}(x, t) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant R_k(x) \| y_1 - y_2 \| \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \; k = 1, 2, \cdots, n), \tag{11}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

3°. Сделаем несколько замечаний к теореме 1.

а) Условия теоремы в некотором смысле являются точными, как показывает следующий пример.

Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = p(x)\, y(x+1), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{12}$$

где

$$p(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{при} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Легко проверить, что все непрерывные решения уравнения (12) непрерывно дифференцируемы и выражаются формулой

$$y(x) = \begin{cases} cx(2-x) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ c & \text{при} \quad 1 < x < +\infty \end{cases} \tag{12'}$$

$$(-\infty < c < +\infty).$$

Все эти решения проходят через точку $x = 0$ и, таким образом, задача с начальными данными $y(x_0) = y^0$ $(x_0 \geqslant 0)$ для уравнения (12) корректна лишь в случае $x_0 > 0$. К тому же выводу мы приходим, применив теорему 1, так как

$$\int_{x_0}^{\sim} R(t)\, dt = \int_{x_0}^{\sim} p(t)\, dt = (1 - x_0)^2 \quad (0 \leqslant x_0 \leqslant 1).$$

б) Условия (1) могут выполняться для оператора $V(x, \varphi)$ „в малом", скажем, при

$$\| \varphi(x) - y^0 \| \leqslant h \quad (h > 0). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае теорема 1 остается справедливой, если

$$\left\| \int_{x_0}^{x} V_c(t, \varphi)\, dt \right\| \leqslant h \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta). \tag{13'}$$

в) При фиксированном x_0 решение задачи (5)—(6) непрерывно зависит от y^0. Зависимость от начальных данных будет непрерывной при $|x_0 - x_1| \leqslant \delta$ $(\delta > 0)$, если на том же отрезке условия (8) выполняются равномерно.

г) Случай $x_0 = \pm\infty$ (если $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$) не исключается.

д) При соответствующих условиях типа (1) аналогичную теорему можно доказать и в случае, когда оператор $V(x, \varphi)$ зависит от значений функции $\varphi(t)$ и ее производной („нейтральный" тип).

§ 2. *Выделение вольтерровской части.* В дальнейшем остановимся на случае $x_0 = \alpha$.

1°. Обозначим $V = V_+$, если оператор V вольтерровский, т. е. $\rho_{ik}(x, t) \equiv \text{const}$ при $t > x$. В этом случае, очевидно, $\beta = b$ и задача (5)—(6) фактически является основной начальной задачей, для которой ограничение (8) оказывается лишним, как показывает следующее обобщение теоремы о существовании решения основной начальной задачи*.

Теорема 2. *Если* $V = V_+$, *то задача* (5)—(6) *при* $x_0 = \alpha$ *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть

$$y_n(x) = y^0 + \int_\alpha^x V_c(t, y_{n-1})\, dt \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ n \geqslant 1), \tag{14}$$

где $y_0(x)$—некоторая непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция. Обозначив

$$\Delta_n(x) = \max_{\alpha \leqslant t \leqslant x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|, \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ n \geqslant 1), \tag{15}$$

из (1) и (14) получим

$$\Delta_n(x) \leqslant \int_\alpha^x A(t)\, \Delta_{n-1}(t)\, dt \qquad (n \geqslant 1),$$

где функция $A(x) = \int_\alpha^x d\rho(x, t)$, согласно условию (1'), интегрируема на (α, β). Следовательно,

$$\Delta_n(x) \leqslant \frac{\text{const}}{n!}\left[\int_\alpha^\beta A(t)\, dt\right]^n \to 0,\ n \to \infty,$$

откуда и следует теорема.

---

* Дальше ради краткости полагаем $n = 1$, хотя все нижеследующие результаты без труда распространяются на случай системы уравнений.

2°. Уточним теперь теорему 1 при $x_0 = \alpha$, выделяя в некотором смысле из оператора V вольтерровскую часть. Для этого введем вспомогательный оператор*

$$V_*(x, \varphi_1, \varphi_2) = V_c(x, \varphi^*), \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \tag{16}$$

где

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{при} \quad \alpha \leqslant t \leqslant x \\ \varphi_2(t) & \text{при} \quad x < t \leqslant \beta, \end{cases} \tag{16'}$$

и обозначим

$$A(x) = \int_{\alpha}^{x+0} d\rho(x, t),$$

$$B(x) = \int_{x+0}^{\beta} d\rho(x, t) + \int_{\beta}^{b} \Psi(t)\, d\rho(x, t). \tag{17}$$

Теорема 3. *Задача* (5)–(6) ***имеет единственное решение*** *при* $x_0 = \alpha$, *если*

$$\theta = \int_{\alpha}^{\beta} B(t) \exp\left\{ \int_{t}^{\beta} A(t_1)\, dt_1 \right\} dt < 1. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим

$$y_n(x) = y^0 + \int_{\alpha}^{x} V_*(t, y_n, y_{n-1})\, dt \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ n \geqslant 1), \tag{19}$$

где $y_0(x)$ — некоторая непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция. Последовательность $\{y_n(x)\}_1^\infty$ существует и единственна в силу теоремы 2. Из (1), (16) и (17) получим

$$\Delta_n(x) \leqslant \int_{\alpha}^{x} A(t)\, \Delta_n(t)\, dt + \Delta_{n-1} \int_{\alpha}^{x} B(t)\, dt \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \tag{20}$$

где $\Delta_n(x)$ определяется формулой (15) и $\Delta_n = \Delta_n(\beta)$.

Из условия (18) и оценки (20) имеем

$$\Delta_n(x) \leqslant \Delta_{n-1} \int_{\alpha}^{x} B(t) \exp\left\{ \int_{t}^{x} A(t_1)\, dt_1 \right\} dt \leqslant \theta\, \Delta_{n-1} \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \tag{20'}$$

откуда $\Delta_n \leqslant \theta^{n-1} \Delta_1 \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е. последовательность $\{y_n(x)\}_1^\infty$ равномерно сходится на $[\alpha, \beta]$, чем и заканчивается доказательство.

* В этом построении $V = V(x, \varphi)$ рассматривается как функционал, зависящий от параметра x.

3°. Особый интерес представляет случай $-\infty \leqslant \alpha < +\infty$, $\beta = +\infty$. В этом случае результаты Догса и Насра ([2]) значительно перекрываются теоремой 3, однако последнюю в некоторых случаях можно уточнить, полагая $\theta = 1$. Именно, пусть $\rho(x, t) \equiv \mathrm{const}$ при $t > \gamma(x)$ $(x \leqslant \gamma(x) < +\infty)$. Обозначим $\gamma_0(x) = x$, $\gamma_n(x) = \gamma(\gamma_{n-1}(x))$ $(n \geqslant 1)$.

Теорема 3′. *Если*

$$\theta(x) = \int_\alpha^x B(t) \exp\left\{\int_t^x A(t_1)\,dt_1\right\} dt < 1, \quad (\alpha \leqslant x < +\infty) \tag{21}$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \{1 - \theta(\gamma_n(x))\} = +\infty \quad (\alpha \leqslant x < +\infty), \tag{22}$$

то задача (5)—(6) *имеет единственное решение при* $x_0 = \alpha$.

Доказательство. Повторяя начало доказательства теоремы 3, вместо оценки (20′) получим такую

$$\Delta_n(x) \leqslant \theta(x)\,\Delta_{n-1}(\gamma_1(x)) \leqslant \Delta_1 \prod_{k=0}^{n-1} \theta(\gamma_k(x)), \quad (\alpha \leqslant x < +\infty). \tag{23}$$

В силу условий (21) и (22) произведение в правой части оценки (23) расходится к нулю при $n \to \infty$ и равномерно ограничено единицей при $\alpha \leqslant x < +\infty$, откуда и следует теорема.

4°. При исследовании функциональных уравнений

$$y(x) = L(x, y) \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \tag{24}$$

где оператор L зависит от значений функции $y(x)$ на $[\alpha, \beta]$, можно также выделить вольтерровскую часть, применив следующий метод последовательных приближений

$$y_n(x) = L^*(x, y_n, y_{n-1}) \quad (n \geqslant 1), \tag{24′}$$

где оператор L^* строится из L по схеме (16)—(16′) и функция $y_0(x)$ задана. Существование функций $y_n(x)$, являющихся решениями вольтерровских уравнений, можно обеспечить соответствующими условиями (см., например, ([5])).

Уточним теперь теорему 3, потребовав дополнительно, чтобы функция

$$\omega(x, t) = \int_\alpha^x \rho(u, t)\,du \quad (\alpha \leqslant x, t \leqslant \beta) \tag{25}$$

была абсолютно непрерывна по t.

Обозначим

$$K_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\,\omega(x, t); \quad K_n(x, t) =$$

$$= \int_t^x K_{n-1}(x, u) K_1(u, t)\, du, \quad n \geqslant 2, \quad \alpha \leqslant t \leqslant x \leqslant \beta$$

$$R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t), \tag{26}$$

$$Q(x) = \int_x^{\beta} K(x, u)\, du + \int_{\beta}^{b} \Psi(t)\, d\rho(x, t).$$

Применив схему, приведенную в начале этого пункта, к оператору L, определяемому формулой (9), получим следующий результат.

Теорема 4. *Если*

$$Q(x) + \int_{\alpha}^{x} R(x, t) Q(t)\, dt \leqslant \theta < 1 \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \tag{27}$$

то задача (5)—(6) *имеет единственное решение при* $x_0 = \alpha$.

Как и в теореме 3′, в некоторых случаях можно положить $\theta = 1$.

5°. В случае линейных уравнений теоремы 2—4 можно усилить. Рассмотрим, например, простейшее уравнение

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x) y(x+1) + c(x) \quad (x_0 \leqslant x < +\infty), \tag{28}$$

где

$$\int_{x_0}^{\infty} c(t)\, dt < +\infty. \tag{28'}$$

Начальная задача $y(x_0) = y^0$ для уравнения (28) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение, если

$$\theta(x) = \int_{x_0}^{x} |b(t)| \exp\left\{\int_t^x a(t_1)\, dt_1\right\} dt < 1 \tag{29}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{1 - \theta(x+n)\} = +\infty, \quad x_0 \leqslant x < +\infty \tag{29'}$$

(аналог теоремы 3′), или

$$\theta_1(x) = \int_x^{x+1} |b(t-1)|\, dt + \int_{x_0}^{x}\int_t^{t+1} |b(t_1 - 1)|\, dt_1 |a(t) + b(t-1)| \times$$

$$\times \exp\left\{\int_t^x [a(t_1) + b(t_1 - 1)]\, dt_1\right\} dt < 1 \tag{30}$$

и
$$\sum_{n=0}^{\infty}[1-\theta_1(x+n)]=+\infty \quad (x_0<x<+\infty); \tag{30''}$$

где принято $b(x)=0$ при $x<x_0$ (аналог теоремы 4).

В условии (29) учитывается знак функции $a(x)$, а в менее ограничительном условии (30) — знаки $a(x)$ и $b(x)$. Подчеркнем, что при выполнении одного из этих условий обеспечена единственность лишь *ограниченного* решения, что хорошо иллюстрируется уравнением

$$y'(x)=2xe^{-2x-1}y(x+1) \quad (-\infty<x<+\infty), \tag{31}$$

обладающим семейством неограниченных решений

$$y(x)=ce^{x^2} \quad (-\infty<c<+\infty,\ c\neq 0). \tag{31'}$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Դիֆերենցիալ-ֆունկցիոնալ հավասարումների համար մի խնդրի մասին

Դիցուք $V(x,\varphi)=\{V_k\}_1^n$ ($\alpha<x<\beta$, $n\geq 1$) *օպերատորը սահմանված է* $[a,b]$ ($-\infty<a\leq\alpha<\beta\leq b<+\infty$) *հատվածի վրա սահմանափակ* $\varphi(t)=\{\varphi_k\}_1^n$ *վեկտոր-ֆունկցիաների դասում և բավարարում է (1) պայմանին։* $[a,\alpha]$ *և* $[\beta,b]$ *հատվածների վրա համապատասխանորեն սահմանենք* $\varphi(x,c)$ *և* $\psi(x,c)$ *վեկտոր-ֆունկցիաների ընտանիքները, որոնք բավարարում են (2) և (3) պայմաններին։ Դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը՝ գտնել* $y(x)$ ($\alpha<x<\beta$) *անընդհատ վեկտոր-ֆունկցիա, որը բավարարում է* $y(x_0)=y^0$ ($\alpha\leq x_0\leq\beta$, $y^0=\{y_k^0\}_1^n$) *նախնական պայմանին և*

$$y'(x)=V(x,y) \quad (\alpha<x<\beta)$$

հավասարմանը, ընդ որում այս հավասարման մեջ $y(x)$ *ֆունկցիան անընդհատորեն շարունակվում է* $[a,\alpha]$ *և* $[\beta,b]$ *հատվածների վրա* φ *և* ψ *ընտանիքների միջոցով։*

Ստացված են նշված խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը ապահովող պայմաններ։ $x_0=\alpha$ *դեպքում սահմանափակումները զգալիորեն թուլացվում են։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин* и *Л. Э. Эльсгольц*, УМН, XVII, вып. 2 (104) 1962. [2] *Sh. Doss, S. K. Nasr*, Amer. J. Math. 75, № 4 (1953), 713—716. [3] *А. Б. Шгыкан*, УМН, XIII, вып. 6 (84) (1958), 193—206. [4] *А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин*, УМН, XV, вып. 6 (96) (1960), 133—136. [5] *А. Н. Тихонов*, Бюлл. МГУ, 1, секция А, вып. 8 (1938), 1—25.