ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 3

ФИЗИКА

М. Р. Магомедов

Функция Грина для волнового уравнения в случае двух диспергирующих сред

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. И. Алиханяном 4/XI 1962)

В предыдущей работе [1] были получены асимптотические выражения для вектор-потенциала поля движущейся заряженной частицы при наличии двух диспергирующих сред. В настоящей статье дается строгий вывод точных решений волнового уравнения для вектор-потенциала поля в случае двух диспергирующих сред.

Для решения поставленной задачи вспомним, что решение уравнения для Фурье-компоненты вектор-потенциала, удовлетворяющее нулевым граничным условиям на бесконечности, записывается в виде:

$$\vec{A}_\omega = \frac{1}{C}\int \vec{j}_\omega(\vec{r}')\, G_k(\vec{r}/\vec{r}')\, d\vec{r}', \tag{1}$$

где $G_k(\vec{r}/\vec{r})$ — функция Грина. В случае одной бесконечной среды ее можно выбрать в виде расходящейся сферической волны (что соответствует выбору запаздывающего потенциала [2]):

$$g_k(R) = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega), \qquad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \tag{2}$$

Обратимся теперь к построению функции Грина в случае двух сред. Первую среду будем характеризовать диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$, а вторую $\varepsilon_2(\omega)$.

Выберем систему координат так, чтобы плоскость xy совпадала с границей раздела сред, а ось z была направлена из первой среды во вторую.

Для построения $G_k(\vec{r}/\vec{r}')$ рассмотрим отдельно два случая.

а) Источник находится в первой среде, т. е. $z' < 0$. Если бы первая среда занимала все пространство, то функция Грина определялась формулой (2) с $\varepsilon = \varepsilon_1(\omega)$. Однако в рассматриваемом случае она занимает только полупространство $z < 0$. Поэтому выражение (2) с $\varepsilon = \varepsilon_1(\omega)$ необходимо умножить на функцию $\vartheta(-z)$, которая равна единице при $z < 0$ и нулю при $z > 0$, и учесть еще наличие границы раздела сред. Для этого добавим к $g_{k_1}(R)\,\vartheta(-z)$ решение однородного уравнения, не имеющее особенностей в области $z < 0$. В качестве решения возьмем выражение

$$\vartheta(-z)\,\alpha\,\frac{e^{ik_1R_1}}{R_1},\tag{3}$$

$$k_1^2=\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_1(\omega),\qquad R_1=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')]^{\frac{1}{2}},$$

α — произвольный коэффициент.

Ясно, что этот член не имеет особенностей при $z<0$, $z'<0$ и поэтому является решением однородного уравнения. Сумма вышеуказанных двух членов дает поле в полупространстве $z<0$. Очевидно, однако, что в полупространстве $z>0$ тоже должно существовать некоторое поле, так как в противном случае мы не сможем удовлетворить граничным условиям.

Это поле мы запишем в виде:

$$\vartheta(z)\,\bar{\beta}'e^{ik_2R}/R.\tag{4}$$

Как видно из этого выражения, оно не имеет особенностей при $z>0$. Поэтому поле единичного источника в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$\vartheta(-z)\,e^{ik_1R}/R+\alpha\vartheta(-z)\,e^{ik_1R_1}/R_1+\vartheta(z)\,\bar{\beta}'e^{ik_2R}/R.\tag{5}$$

б) Источник находится во второй среде, т. е. $z'>0$. В этом случае мы поступаем совершенно так же, как и в первом случае. В результате получается выражение, отличающееся от (5) только заменой

$$\varepsilon_1\rightleftarrows\varepsilon_2,\quad \vartheta(-z)\rightleftarrows\vartheta(z).$$

Для определения коэффициентов (5) воспользуемся интегральным представлением сферических волн (см. формулы 17, § 18 [3])

$$e^{ikR}/R=\frac{i}{2\pi}\int e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}+i\lambda|z-z'|}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda},\tag{6}$$

где $\vec{\varkappa}$, $\vec{q}$ — компоненты $\vec{k}$ и $\vec{r}-\vec{r}'$ в плоскости xy. Применяя эту формулу ко всем членам в выражении (5) и к аналогичному выражению при $z'>0$ и, для простоты, сохраняя обозначения коэффициентов*, запишем поле при $z'<0$ в виде:

$$\frac{i}{2\pi}\left\{\vartheta(-z)\int e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}+i\lambda_1|z-z'|}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_1}+\vartheta(-z)\int\alpha e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}-i\lambda_1(z+z')}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_1}+\right.$$
$$\left.+\vartheta(z)\int\bar{\beta}'e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}+i\lambda_2(z-z')}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_2}\right\},\tag{7}$$

а при $z'>0$ в виде

$$\frac{i}{2\pi}\left\{\vartheta(z)\int e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}+i\lambda_2|z-z'|}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_2}+\vartheta(z)\int\bar{\alpha}\,e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}+i\lambda_2(z+z')}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_2}+\right.$$
$$\left.+\vartheta(-z)\int\beta'\,e^{i\vec{\varkappa}\vec{q}-i\lambda_1(z-z')}\,\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_1}\right\}.\tag{8}$$

---

* При таком переходе вторые и третьи члены в нижеписанных формулах не перестают удовлетворять однородному уравнению для функции Грина.

Из самого построения этих выражений видно, что они в отдельности должны удовлетворять граничным условиям и что полная функция Грина равна их сумме.

При определении коэффициентов в (7) и (8) мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда плотность тока имеет только компоненту, нормальную к границе раздела сред. Тогда вектор-потенциал будет иметь только компоненту A_z, через которую тангенциальные компоненты полей выражаются в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\vec{H}_{\omega\varphi} = -\frac{\partial A_{\omega z}}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi, \quad \vec{E}_{\omega\rho} = -\frac{c}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial^2 A_{\omega z}}{\partial\rho\,\partial z}\vec{e}_\rho, \tag{9}$$

где $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_\rho$ — единичные векторы вдоль направлений φ и ρ. Непрерывность тангенциальной составляющей магнитного поля, согласно первому из двух уравнений (9) и формуле (1), эквивалентна непрерывности функции Грина при $z = 0$, т. е.

$$G_k(z<0)\,|_{z=0} = G_k(z>0)\,|_{z=0}, \tag{10а}$$

а непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля, согласно второму из уравнений (9) и формуле (1), эквивалентна вы-выполнению равенства

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial z}G_z(z<0)\,|_{z=0} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial}{\partial z}G_k(z>0)\,|_{z=0}. \tag{10б}$$

При этом принято во внимание, что $\dfrac{\partial A}{\partial \rho} \sim A$ с точностью до коэффициента, не зависящего от свойств среды. Условия, аналогичные (10), должны выполняться и при $z' > 0$. Используя эти граничные условия, получим следующие выражения для коэффициентов в (7) и (8):

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2\lambda_1 - \varepsilon_1\lambda_2}{\varepsilon_2\lambda_1 + \varepsilon_1\lambda_2}, \qquad \tilde{\beta}' = \tilde{\beta}\,e^{i\lambda_2 z' - i\lambda_1 z'}, \qquad \tilde{\beta} = \frac{2\varepsilon_2\lambda_2}{\varepsilon_1\lambda_2 + \varepsilon_2\lambda_1}. \tag{11}$$

Коэффициенты $\tilde{\alpha}$ и β, где $\beta' = \beta e^{i\tilde{\lambda}_2 z' - i\lambda_1 z'}$, получаются из α и $\tilde{\beta}$ взаимной перестановкой индексов 1 и 2.

Подставляя найденные значения коэффициентов в (7) и (8) и группируя члены с одинаковыми $\vartheta(z)$ функциями, получим функцию Грина:

$$G_k(\vec{r}\,|\,\vec{r}') = \frac{i}{2\pi}\Big\{\vartheta(-z')\int e^{i(\vec{\varkappa}\vec{q} + \lambda_1|z-z'|)}\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_1} +$$

$$+\vartheta(-z')\int \alpha e^{i(\vec{\varkappa}\vec{q} - \lambda_1(z+z'))}\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_1} + \vartheta(z')\int \beta e^{i(\vec{\varkappa}\vec{q} - \lambda_1 z + \lambda_2 z')}\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_1}\Big\}, \quad z<0 \tag{12}$$

$$G_k(\vec{r}\,|\,\vec{r}') = \frac{i}{2\pi}\Big\{\vartheta(z')\int e^{i(\vec{\varkappa}\vec{q} + \lambda_2|z-z'|)}\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_2} +$$

$$+\vartheta(z')\int \tilde{\alpha}\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{q}+\lambda_2(z+z'))}\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_2}+\vartheta(-z')\int \tilde{\beta} e^{i(\vec{\varkappa}\vec{q}+\lambda_2 z-\lambda_1 z')}\frac{d\vec{\varkappa}}{\lambda_2}\Bigg\}, \quad z>0 \tag{13}$$

В этих выражениях удобно перейти к угловым переменным. В выражении (12) положим

$$k_x = k_1 \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad k_y = k_1\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad \lambda_1 = k_1\cos\vartheta. \tag{14}$$

После этого его можно привести к виду:

$$G_k(\vec{r}\,|\,\vec{r}') = \vartheta(-z')\, g_{k_1}(R) + \vartheta(-z')\, J_\alpha + \vartheta(z')\, J_\beta, \qquad z<0, \tag{15}$$

где

$$g_{k_1}(R) = e^{ik_1R}/R,$$

$$J_\alpha = \frac{ik_1}{2}\int_\Gamma H_0^{(1)}(u_1)\, e^{-ik_1(z+z')\cos\vartheta}\,\alpha(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta, \tag{16}$$

$$J_\beta = \frac{ik_1}{2}\int_\Gamma H_0^{(1)}(u_1)\, e^{-ik_1 z\cos\vartheta+i\lambda_2 z'}\,\beta(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta,$$

$$\alpha = \frac{\lambda_1\varepsilon_2-\lambda_2\varepsilon_1}{\lambda_1\varepsilon_2+\lambda_2\varepsilon_1}, \qquad \beta = \frac{2\varepsilon_1\lambda_1}{\varepsilon_1\lambda_2+\varepsilon_2\lambda_1}, \qquad \lambda_{1,2} = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2}-\varkappa^2}, \tag{17}$$

$$u_1 = qk_1\sin\vartheta, \quad \varkappa = k_1\sin\vartheta;$$

$H_0^{(1)}(u)$ — функция Ханкеля первого рода. Под контуром Γ понимается контур, изображенный на фиг. 1.

В выражении (13) положим

$$k_x = k_2\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad k_y = k_2\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad \lambda_2 = k_2\cos\vartheta \tag{18}$$

и приведем его к виду:

$$G_k(\vec{r}\,|\,\vec{r}') = \vartheta(z')\, g_{k_2}(R) + \vartheta(z')\, J_{\tilde{\alpha}} + \vartheta(-z')\, J_{\tilde{\beta}}, \qquad z>0 \tag{19}$$

$$g_{k_2}(R) = e^{ik_2R}/R,$$

$$J_{\tilde{\alpha}} = \frac{ik_2}{2}\int_\Gamma H_0^{(1)}(u_2)\, e^{ik_2(z+z')\cos\vartheta}\,\tilde{\alpha}(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta,$$

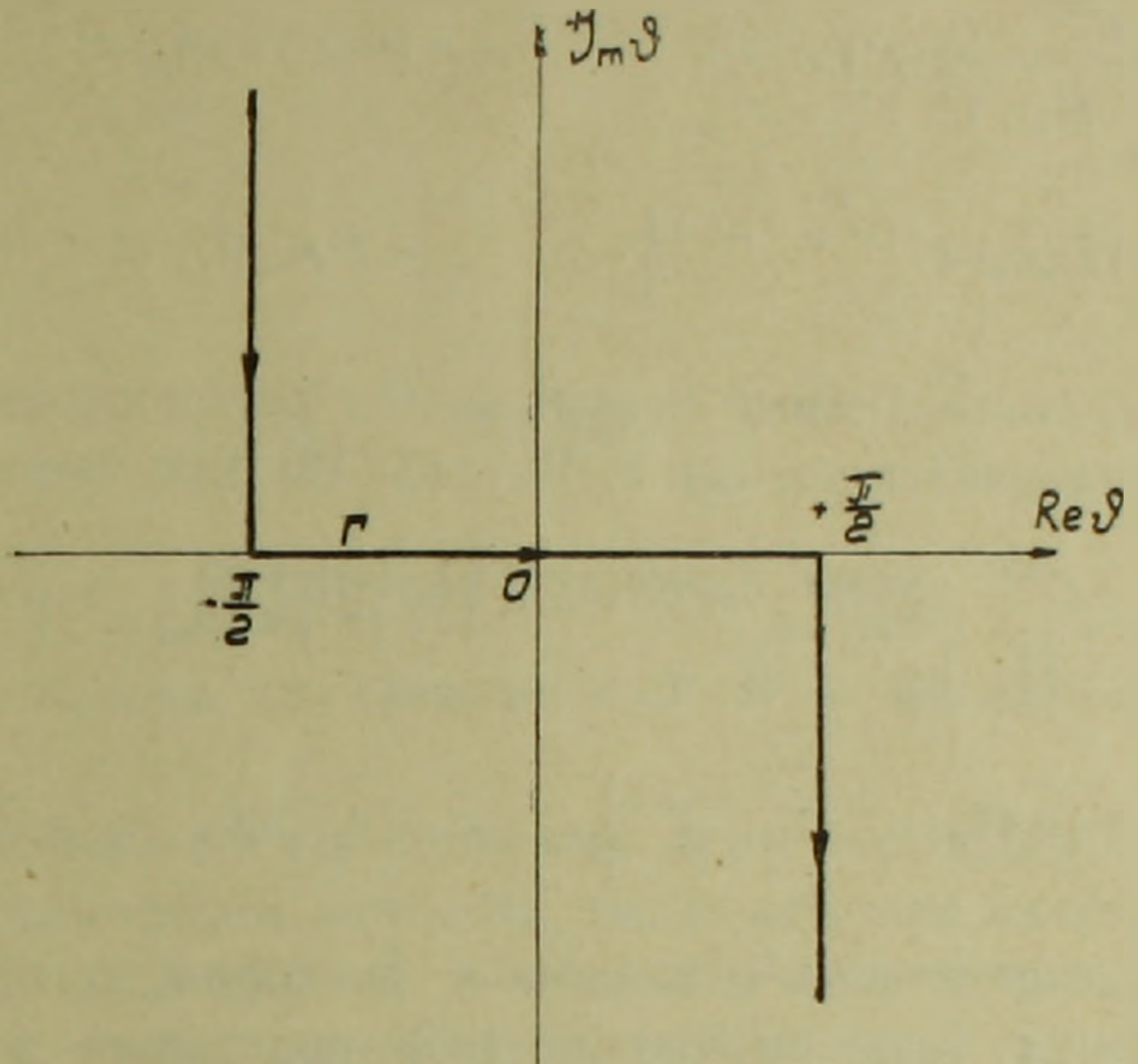
$$J_{\tilde{\beta}} = \frac{ik_2}{2}\int_\Gamma H_0^{(1)}(u_2)\, e^{ik_2 z\cos\vartheta-i\lambda_1 z'}\,\tilde{\beta}(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta, \tag{20}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\lambda_2\varepsilon_1-\lambda_1\varepsilon_2}{\lambda_2\varepsilon_1+\lambda_1\varepsilon_2}, \qquad \tilde{\beta} = \frac{2\varepsilon_2\lambda_2}{\varepsilon_1\lambda_2+\varepsilon_2\lambda_1}.$$

$$u_2 = qk_2\sin\vartheta, \qquad \varkappa = k_2\sin\vartheta. \tag{21}$$

Выражения (15) и (19) полностью определяют функцию Грина для волнового уравнения для случая, когда плотность тока имеет только компоненту, нормальную к границе раздела сред.

Для получения вектор-потенциала достаточно подставить эту функцию Грина в формулу (1). Например, для заряда, движущегося по оси z со скоростью $V(t)$, будем иметь:



Фиг. 1.

$$A_{\omega t} = \frac{e}{2\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(t)\{\vartheta(-z')\, g_{k_1}(R) + \vartheta(-z')\, J_2 + \vartheta(z')\, J_3\}\, e^{i\omega t}\, dt, \qquad (22)$$

$$z < 0, \quad z' = z(t)$$

и аналогичное выражение при $z > 0$.

Что касается скалярного потенциала, то при необходимости его можно получить из условия Лоренца:

$$\varphi_\omega = \frac{c}{i\omega\varepsilon}\, \mathrm{div}\vec{A}_\omega. \qquad (23)$$

Формулы (15) и (16) являются точными. Однако во многих случаях полезны также их асимптотические оценки. Для получения последних воспользуемся асимптотическим представлением функций Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(u) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi u}}\, e^{iu - i\frac{\pi}{4}}, \qquad u \gg 1.$$

Кроме этого, предположим, что выполняется условие

$$d \ll R_0 \cos\vartheta_0, \qquad d = \max\rho', \qquad (24)$$

где ρ' — проекция радиуса-вектора заряда $\vec{r}'$ на плоскость xy, $R_0 = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $\rho = R_0 \sin\vartheta_0$, $z = \pm R_0\cos\vartheta_0$ (в зависимости от того, в какой среде определяется поле). После этого применим ко всем членам в выражениях (15) и (19) метод перевала.

Интегралы типа J подробно исследованы в ([3]). В первом приближении вместо (15) получаем:

$$G_k(\vec{r}\,|\,\vec{r}\,) = \frac{e^{ik_1R_0}}{R_0}\Big\{\vartheta(z')\, e^{-i(\vec{\varkappa}\,\vec{\rho}\,' - \lambda_1 z')} + \vartheta(-z')\,\alpha(\vartheta_0)\, e^{-i(\vec{\varkappa}\,\vec{\rho}\,' + \lambda_1 z')} +$$

$$+ \vartheta(z')\,\beta(\vartheta_0)\, e^{-i(\vec{\varkappa}\,\vec{\rho} - \lambda_2 z')}\Big\}, \qquad z - z' < 0, \quad z < 0. \tag{25}$$

Здесь ϑ_0 — угол, составляемый направлением распространения волны с отрицательным направлением оси z. Вместо (19) получается выражение:

$$G_k(\vec{r}\,|\,\vec{r}\,) = \frac{e^{ik_2R}}{R}\Big\{\vartheta(z')\, e^{-i(\vec{\varkappa}\,\vec{\rho}\,' + \lambda_2 z')} + \vartheta(z')\,\widetilde{\alpha}(\vartheta_0)\, e^{-i(\vec{\varkappa}\,\vec{\rho}\,' - \lambda_2 z')} +$$

$$+ \vartheta(z')\,\widetilde{\beta}(\vartheta_0)\, e^{-i(\vec{\varkappa}\,\vec{\rho}\,' + \lambda_1 z')}\Big\}, \qquad z - z' > 0, \quad z > 0, \tag{26}$$

где ϑ_0 — угол, составляемый волновым вектором с положительным направлением оси z. Если выражение (25) подставить в формулу (1), то мы получим формулу, совпадающую с (3), полученной в работе ([1]).

Условие применимости этих выражений, вытекающее из использования асимптотики функций Ханкеля, метода перевала и условия (24) заключается в выполнении неравенства:

$$R_0 \gg \frac{1}{\varkappa \sin\vartheta_0} + \frac{d}{\sin\vartheta_0}, \tag{27}$$

где $\varkappa$ равно $k_1 \sin\vartheta_0$ при $z < 0$ и $k_2 \sin\vartheta_0$ при $z > 0$.

Автор выражает свою глубокую признательность Г. М. Гарибяну за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Физический институт ГКАЭ

Մ. Ռ. ՄԱԳՈՄԵԴՈՎ

Երկու դիսպերսող միջավայրերում ալիքային հավասարման Գրինի ֆունկցիան

Գրինի ֆունկցիայի միջոցով ստացված են անհամասեռ ալիքային հավասարումների լուծումը էլեկտրամագնիսական դաշտի վեկտորական և սկալյար պոտենցիալների համար երկու կիսաանվերջ դիէլեկտրիկներից բաղկացած միջավայրում։

Հանգամանորեն դիտարկված է դիէլեկտրիկների բաժանման սահմանին հոսանքների ուղղահայացության դեպքը։ Բերված է նաև լուծումների ասիմպտոտիկ ձևը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. М. Гарибян, М. Р. Магомедов*, ДАН АрмССР., т. XXXVI, № 2 (1963). [2] *Ф. М. Морс, Г. Фашбах*, Методы теоретической физики, т. I, ИИЛ М, 1958. [3] *Л. М. Бреховских*, Волны в слоистых средах, Академиздат, 1957.