

М. А. Задоян

**Ползучесть при кручении круглого конического стержня,
 материал которого обладает свойством
 нестационарной неоднородности**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 18/XI 1962)

Вопросы установившейся ползучести при кручении круглых стержней переменного диаметра, в том числе конических стержней и оболочек, в случае однородных материалов исследованы в монографии Л. М. Качанова (¹) и в работе Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна (²).

Ниже рассматривается задача неуставившейся ползучести при кручении круглого конического стержня, материал которого обладает переменными во времени и по координатам механическими свойствами. Такая неоднородность может возникать, например, при воздействии на материал облучения нестационарным потоком нейтронов, гамма-лучей и т. д.

Принимая сферическую систему координат r, θ, z (фиг. 1), введем предположение, что механические свойства материала конуса меняются по θ и t .

Положим, как в обычной теории кручения круглых стержней переменного диаметра, что

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0,$$

а компоненты τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ не зависят от z и суть функции от r, θ, t .

Исходя из теории ползучести наследственного типа, соотношения между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвигов для рассматриваемого случая неоднородности возьмем в виде

$$\Phi(\theta, t) \varepsilon_i^m(r, \theta, t) = \sigma_i(r, \theta, t) + \int_0^t \sigma_i(r, \theta, \tau) N(\theta, t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

где

$$N(\theta, t, \tau) = \Omega(\theta, t) K(t, \tau)$$

$$\varepsilon_l = \sqrt{\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2}, \quad \varepsilon_i = \sqrt{\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2}, \quad m = \text{const.}$$

Функции $\Phi(\theta, t)$ и $\Omega(\theta, t)$ учитывают характер неравномерного протекания ползучести в стержне и определяются из экспериментов.

Связь между компонентами напряжений и деформаций сдвигов имеет вид

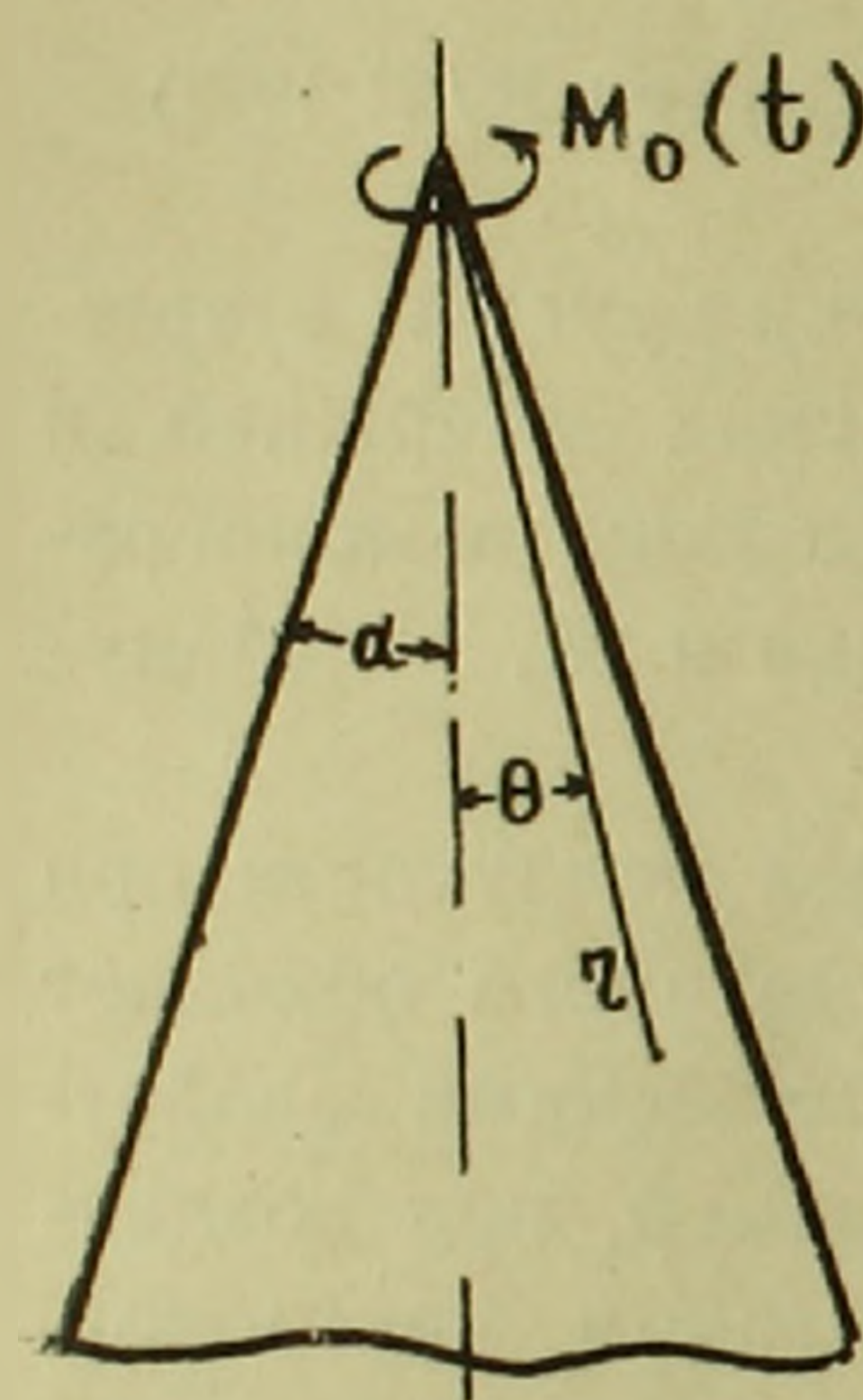
$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\varepsilon_l}{\sigma_l} \tau_{r\varphi}, \quad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{\varepsilon_l}{\sigma_l} \tau_{\theta\varphi}. \quad (2)$$

Следуя В. В. Соколовскому⁽³⁾, как в задаче пластического кручения конического стержня, принимаем

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, \theta, t), \quad \tau_{\theta\varphi} = 0. \quad (3)$$

Тогда из соотношений

$$2\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} - \frac{U_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (4)$$



Фиг. 1.

следует дифференциальное уравнение совместности

$$\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \theta} = \gamma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \theta. \quad (5)$$

Из дифференциального уравнения для нашей задачи

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{r} \tau_{r\varphi} = 0 \quad (6)$$

имеем

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^3} \chi(\theta, t), \quad (7)$$

где $\chi(\theta, t)$ — некоторая неизвестная функция от θ и t .

Учитывая, что $\tau_{\theta\varphi} = 0$, $\gamma_{\theta\varphi} = 0$, из (1) и (7) получим

$$\gamma_{r\varphi} = r^{-\frac{3}{m}} \left\{ \frac{\chi(\theta, t)}{\Phi(\theta, t)} + \int_0^t \chi(\theta, \tau) \frac{N(\theta, t, \tau)}{\Phi(\theta, t)} d\tau \right\}^{\frac{1}{m}}. \quad (8)$$

Подставляя $\gamma_{r\varphi}$ в дифференциальное уравнение совместности (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{\chi(\theta, t)}{\Phi(\theta, t)} + \int_0^t \chi(\theta, \tau) \frac{N(\theta, t, \tau)}{\Phi(\theta, t)} d\tau \right\}^{\frac{1}{m}} = \\ = \left\{ \frac{\chi(\theta, t)}{\Phi(\theta, t)} + \int_0^t \chi(\theta, \tau) \frac{N(\theta, t, \tau)}{\Phi(\theta, t)} d\tau \right\}^{\frac{1}{m}} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда

$$\chi(\theta, t) + \int_0^t \chi(\theta, \tau) N(\theta, t, \tau) d\tau = C^m(t) \Phi(\theta, t) \sin^m \theta, \quad (10)$$

где $C(t)$ — произвольная функция от t .

Из (8) и (10) имеем

$$r = \frac{C(t) \sin \theta}{r^m}. \quad (11)$$

Условие равенства главного момента усилий, действующих в произвольном сечении $r = \cos \theta$, заданному значению крутящего момента $M_0(t)$ в вершине стержня дает

$$\int_0^{\pi/2} \chi(\theta, t) \sin^2 \theta d\theta = \frac{M_0(t)}{2\pi}. \quad (12)$$

Умножая обе части равенства (10) на $\frac{\sin^2 \theta}{\Omega(\theta, t)}$ и интегрируя по θ от нуля до $\pi/2$, получим

$$C^m(t) = \frac{1}{2\pi J_0(t)} \int_0^t M_0(\tau) K(t, \tau) d\tau + \frac{1}{J_0(t)} \int_0^{\pi/2} \frac{\chi(\xi, t) \sin^2 \xi d\xi}{\Omega(\xi, t)}, \quad (13)$$

где

$$J_0(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\Phi(\theta, t)}{\Omega(\theta, t)} (\sin \theta)^{2-m} d\theta. \quad (14)$$

Подставляя значение $C^m(t)$ из (13) в соотношение (10) и используя при этом равенство (12), получим уравнение (4, 5)

$$\chi(\theta, t) + \int_0^t N(\theta, t, \tau) \chi(\theta, \tau) d\tau = F(\theta, t) + \int_0^{\pi/2} M(\xi, \theta, t) \chi(\xi, \tau) d\xi, \quad (15)$$

где

$$F(\theta, t) = \frac{\Phi(\theta, t) \sin^m \theta}{2\pi J_0(t)} \left[M_0(t) + \int_0^t M_0(\tau) K(t, \tau) d\tau \right],$$

$$M(\xi, \theta, t) = \frac{\Phi(\theta, t) \sin^m \theta \sin^2 \xi}{J_0(t)} \left[\frac{1}{\Omega(\xi, t)} - 1 \right]. \quad (16)$$

Из (10) и (12) при $t = 0$ следует, что

$$\chi(\theta, 0) = \frac{M_0(0)}{2\pi J(0)} \Phi(\theta, 0) \sin^m \theta, \quad (17)$$

где

$$J(t) = \int_0^{\pi} \Phi(\theta) (\sin \theta)^{2+m} d\theta. \quad (18)$$

Применив метод последовательных приближений, как в (4, 5), найдем точное решение полученного интегрального уравнения

$$\chi(\theta, t) = F(\theta, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F(\theta, t), \quad (19)$$

где M и N соответственно интегральные операторы Фредгольма и Вольтерра

$$MQ = \int_0^{\pi} M(\xi, \theta, t) Q(\xi, t) d\xi, \quad NQ = \int_0^t N(\theta, t, \tau) Q(\theta, \tau) d\tau. \quad (20)$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ոլորման ժամանակ կոնական ձողի սողքը, որի նյութը օժտված է չկայունացված անհամասեղությամբ

Հիմնվելով լարումների և դեֆորմացիաների ստատիսթիստիկաների միջև սողքի ժառանգականության տիպի կապակցությունից (1), ստատիստիկորեն է կոնական անհամասեղ ձողի սողքը՝ ոլորման ժամանակ (1) կապակցության մեջ $\Phi(\theta, t)$ և $\Omega(\theta, t)$ ֆունկցիաները բնորոշում են նյութի անհամասեղությունը և բնութագրում են, որ փորձից հայտնի են

Հետևելով Վ. Վ. Սոկոլովսկուն¹ (1), ինչպես կոնի պլաստիկական ոլորման խնդրի ժամանակ, բնությունն արդյոք տարբեր միայն r, τ բաղադրիչը: Այդ դեպքում համասեղացողության համաստեղությունից ստացվում է

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\chi(\theta, t)}{r^3}$$

որտեղ $\chi(\theta, t)$ որոշելի ֆունկցիա է θ -ից և t -ից կախված: Օգտվելով (5) համասեղության պայմանից և (1) տանջվածությունից, $\chi(\theta, t)$ -ի համար ստանում ենք (10) վեկտորի տիպի ինտեգրալ հավասարումը, որտեղ բացի $\chi(\theta, t)$ -ից պարունակում է $C(t)$ անհայտ ֆունկցիան: Կիրառելով (12) պայմանը, $C(t)$ -արտահայտում ենք $\chi(\theta, t)$ -ի միջոցով: Տեղադրելով $C(t)$ -ի արժեքը (10) հավասարման մեջ ստանում ենք (15), կրկնակի կորիզով հավասարումը: Այդ հավասարման լուծումը, ինչպես մեր նախորդ հոդվածներում (4, 5) արվում է հաջորդական մոտեցման եղանակով:

$$\chi(\theta, t) = F(\theta, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F(\theta, t)$$

Այստեղ $E(\theta, t)$ ազատ անդամն է, M և N համապատասխանաբար ֆրեդհոլմի և վոլտերրի սպերաոպերներն են (20):

Անհամասեղ ձողի ոլորման ժամանակ փոփոխման է ենթարկվում ոչ միայն դեֆորմացիան ինչպես համասեղի դեպքում այլև լարումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. М. Качанов, Теория ползучести, Физматгиз, М., 1960. ² Н. Х. Арутюнян и М. М. Манукян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XIV, № 4 (1961).
- ³ В. В. Соколовский, Теория пластичности, ГИТТЛ, М.-Л., 1950. ⁴ М. А. Задоян, Известия АН СССР, (ОТН), Механика и машиностроение, № 4, 1961. ⁵ М. А. Задоян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XIV, № 4 (1961).