ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 3

МАТЕМАТИКА

А. В. Петросян

Некоторые вопросы помехоустойчивости функций алгебры логики

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 18 XII 1962)

Вопросы передачи и переработки информации приобретают все большее значение для всех областей современной науки и техники. Понятие „информация“ математически уточняется в работе К. Шеннона ([1]). Эта же работа явилась основой создания теории передачи информации при наличии помех. В работе Хемминга ([2]) показано, что передаваемую информацию можно кодировать так, чтобы помехи, возникающие при передачи, почти не влияли на результат передачи. Теоретическая возможность этого была доказана и в работе ([1]).

Однако до выхода работы Неймана ([3]) не рассматривались вопросы переработки информации с точки зрения ее помехоустойчивости. В работах ([3]) и ([4]) доказано, что для любой переработки информации можно создать устройства, перерабатывающие информацию при наличии помех, сколь угодно надежно.

Так как переработку информации можно описать функциями алгебры логики, то в настоящей работе рассматриваются вопросы переработки информации функциями алгебры логики с точки зрения их помехоустойчивости. Далее будет показано, что с любой функцией алгебры логики связана некоторая непрерывная функция, характеризующая помехоустойчивость данной функции, что помехоустойчивость всех функций алгебры логики (без избытка) имеет один и тот же порядок малости, что помехоустойчивость функции можно увеличить только введением избыточности.

В конце работы доказывается, что для любой функции алгебры логики можно строить другую функцию алгебры логики с избытком, перерабатывающую информацию так же, как и данная функция, но обладающую помехоустойчивостью более высокого порядка.

Предположим, что задана некоторая функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и предположим, что схема S_f, которая имеет n входных каналов и один выходной канал, реализует данную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Внутренняя структура и состав схемы S_f нас не будут интересовать.

Числом $\varepsilon \left(0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ в дальнейшем будет обозначаться вероятность ошибки самой схемы S_f. Аналогично работе [3], обозначим верхние грани вероятностей того, что входные линии передают ложные импульсы, соответственно через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ $(0 \leqslant \eta_l < 1)$. В дальнейшем, иногда, вместо n-разрядного двоичного набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будем употреблять число i, равное двоичному числу с теми же разрядами, т. е. $i = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \cdots + \alpha_n 2^{n-1}$, и вместо того, чтобы писать $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, просто напишем $f(i)$. Предположим, что вероятность появления набора i на входе схемы S_f равна $p_i \left(p_i > 0, \sum_{i=1}^{2^n-1} p_i = 1\right)$. При таких обозначениях верхняя граница вероятности ложного импульса на выходе схемы S_f будет:

$$\eta_f(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)\left[\sum_{\substack{\text{по всем } \mu \text{ и } \nu \\ f(\mu)=1,\ f(\nu)=0}} \left(p_\mu \eta_1^{\overset{1}{\alpha}_{\mu,\nu}} \eta_2^{\overset{2}{\alpha}_{\mu,\nu}} \cdots \eta_n^{\overset{n}{\alpha}_{\mu,\nu}} + p_\nu \eta_1^{\overset{1}{\alpha}_{\nu,\mu}} \eta_2^{\overset{2}{\alpha}_{\nu,\mu}} \cdots \eta_n^{\overset{n}{\alpha}_{\nu,\mu}}\right)\right], \qquad (1)$$

где $\alpha^s_{i,j}$ есть сумма по модулю 2 s-тых разрядов наборов i и j, а

$$\eta_s^\alpha = \begin{cases} \eta_s & \text{если } \alpha = 1 \\ 1 - \eta_s & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Если ввести более наглядное обозначение $P(f = \alpha \to f = \beta)$, которое является вероятностью того, что значение функции равно α, но после искажения входных величин значение функции превращается в β, то для $\eta_f(\varepsilon)$ получим такую формулу

$$\eta_f(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)\,[P(f = 1 \to f = 0) + P(f = 0 \to f = 1)], \qquad (2)$$

или то же самое

$$\eta_f(\varepsilon) = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon)\,\eta_f(0).$$

Доказательства формул (1) и (2) не приводятся ввиду их громоздкости.

Функция $\eta_f(\varepsilon)$ показывает, насколько ненадежна схема S_f при наличии помех на входах и в самой работе схемы S_f. В случае, когда схема работает абсолютно надежно, т. е. $\varepsilon = 0$, функция $\eta_f(\varepsilon)$ показывает, как сильно зависит значение данной функции f от ее аргументов. Иначе говоря, $\eta_f(0)$ характеризует помехоустойчивость данной функции алгебры логики при данном распределении значений ее аргументов, независимо от осуществляемой ее схемы.

Определение 1. $\eta_f(0)$ назовем функцией помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с заданным распределением $p_0, p_1, \ldots, p_{2^n-1}$.

Из формулы (1) видно, что $\eta_f(0)$ является суммой слагаемых вида

$$p_m \tau_{m_1} \tau_{m_2} \cdots \tau_{m_s} (1 - \tau_{m_{s+1}}) \cdots (1 - \tau_{m_n}),$$

причем при $p_i \neq 0$ и малых $\tau_i \left(\tau_i \ll \frac{1}{n} \right)$ главным членом этого выражения является $p_m \tau_{m_1} \tau_{m_2} \cdots \tau_{m_s}$. Число s назовем порядком данного слагаемого, если $p_i \neq 0$, в противном случае порядок данного слагаемого примем равным $+\infty$.

Определение 2. Минимальный порядок слагаемых в выражении $\tau_f(0)$ назовем порядком помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, с заданным распределением $p_0, p_1, \ldots, p_{2^n-1}$.

Определение 3. n-разрядный двоичный набор β назовем активным набором по i-ому аргументу для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при инвертировании i-той позиции в наборе β получается такой набор γ, для которого $f(\gamma) \neq f(\beta)$.

Обозначим все активные наборы по i-тому аргументу для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik_i}$.

Определение 4. Активностью i-того аргумента функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с данным распределением вероятностей $p_0, p_1, \ldots, p_{2^n-1}$ назовем число $\omega_i = p_{\alpha_{i1}} + p_{\alpha_{i2}} + \cdots + p_{\alpha_{ik_i}}$.

В случае, когда $p_i = \text{const}$, получим:

$$\omega_i = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{по всем } \beta} [f(\beta) \oplus f(\gamma)] \text{ (где } \gamma \text{ отличается от } \beta \text{ } i\text{-той позицией)*}.$$

Ясно, что ω_i может равняться нулю либо тогда, когда i-тый аргумент функции не имеет активных наборов, т. е. i-тый аргумент фиктивен, либо если вероятности, соответствующие активным наборам, равны нулю. Чем больше активность данного аргумента, тем больше его влияние на изменение значения функции. Отсюда ясно, что помехоустойчивость функции существенно должна зависеть от активностей ее аргументов. Следующая теорема уточняет эту связь.

Теорема 1. *Линейная часть функции $\tau_f(0)$ имеет вид* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \tau_i$.

Доказательство. Из формулы (1) видно, что линейные члены получаются из таких μ и ν, которые отличаются друг от друга только одним разрядом, т. е. только по активным по какому-либо аргументу наборам.

Если α_{ij} есть j-тый активный набор по i-тому аргументу, то в сумму (1) входит слагаемое вида

$$p_{\alpha_{ij}} (1 - \tau_1) \cdots (1 - \tau_{i-1}) \tau_i (1 - \tau_{i+1}) \cdots (1 - \tau_n).$$

* В этом частном случае понятие активности совпадает с понятием, введенным Ш. Е. Бозояном.

Сумма членов соответствующих всем активным наборам по i-тому аргументу равна:

$$(p_{\gamma_{i1}} + p_{\gamma_{i2}} + p_{\gamma_{i3}} + \cdots + p_{\gamma_{ik_i}})\left[(1-\tau_{i_1})\cdots(1-\tau_{i_{i-1}})\,\tau_{i_i}(1-\tau_{i_{i+1}})\cdots\right.$$

$$\left.\cdots(1-\tau_{i_n})\right].$$

Отсюда следует, что коэффициент при τ_{ii} есть ω_i. Ясно, что другие слагаемые не могут содрежать τ_{ii} линейно. Проводя те же рассуждения для всех аргументов, получим утверждение теоремы.

Определение 5. Функцию $f(x, x_2,\ldots, x_n)$ с распределением $p_0, p_1,\ldots, p_{2^n-1}$ назовем функцией без избытка, если $p_i \neq 0$ ($i = 0, 1,\ldots, 2^n - 1$).

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ без избытка и не постоянна, то ее порядок помехоустойчивости равен единице.*

Доказательство. Так как функция не постоянна, то для нее существует по крайней мере один аргумент, имеющий активные наборы, и так как функция без избытка, то существует хотя бы один аргумент, для которого $\omega_i \neq 0$. Вследствие этого из теоремы 1 непосредственно следует теорема 2.

Следствие. Для того чтобы порядок помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ был отличным от единицы, необходимо и достаточно, чтобы $p_i = 0$ для всех i активных хотя бы по одному аргументу.

Если обозначить через $d(i, j)$ расстояние между наборами i и j ([2]), то можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Если порядок помехоустойчивости функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ больше r, то для любых i и j, для которых $p_i \neq 0$, $p_j \neq 0$ и $f(i) \neq f(j)$ имеет место соотношение $d(i, j) \geqslant 2r + 1$.*

Доказательство. Если порядок помехоустойчивости функции больше r, то все члены в формуле (1) до r-того порядка включительно равны нулю. Отсюда следует, что для любого i, для которого $p_i \neq 0$, и для всех α, для которых $d(i, \alpha) \leqslant r$, имеет место равенство $f(i) = f(\alpha)$. То же самое имеет место для j. Отсюда следует, что $d(i, j) \geqslant 2r + 1$, чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 4. *Если функция задана только на наборах α, для которых $p_\alpha \neq 0$, причем так, что удовлетворяются условия теоремы 3, то можно эту функцию доопределить так, чтобы ее порядок помехоустойчивости был больше r.*

Доказательство. Из формулы (1) видно, что функцию надо доопределить таким образом, чтобы ближайший нуль функции находился от единицы (для которого $p_\alpha \neq 0$) не ближе чем на расстояние r, и наоборот. Но это можно сделать, так как расстояние между заданными единицами и нулями функции, по условию теоремы, больше $2r$.

Теорема 5. *Для любой функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *с заданным распределением* $p_0, p_1, \ldots, p_{2^n-1}$ *и любого целого числа* $k > 0$ *можно построить такую функцию* $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *с порядком помехоустойчивости не менее* k *так, чтобы при соответствующим образом подстановке* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *на место аргументов* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *получить* $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана таблично. Эту таблицу расширим повторением, некоторые из столбцов для аргументов до тех пор, пока нули и единицы данной функции будут находиться на расстоянии не менее чем $2k+1$. После этого будут выполняться условия теоремы 4. Но тогда мы из теоремы 4 получим доказательство теоремы 5.

Ереванский государственный университет.

Ա. Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Խանգարումների նկատմամբ տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունության որոշ հարցեր

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ տրամաբանական հանրահաշվի յուրաքանչյուր ֆունկցիայի հետ կապված է մի անընդհատ ֆունկցիա, որը բնորոշում է վերջինիս կայունությունը խանգարումների նկատմամբ: Այնուհետև ցույց է տրված, որ տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիաների կայունությունը կարելի է բարձրացնել միայն նրանց մեջ հավելյալ մտցնելու օգնությամբ, որ ցանկացած ֆունկցիայի համար կարելի է կառուցել մի նոր ֆունկցիա, որը խանգարումների նկատմամբ օժտված լինի ցանկացած չափով բարձր կայունությամբ և կատարի նույն դերը, ինչ որ տրված ֆունկցիան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Шеннон*, Статистическая теория передачи электрических сигналов, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953. [2] *Р. Хемминг*, Сб., Коды с обнаружением и исправлением ошибок. ИЛ, М.. 1956. [3] *Дж. Нейман*, Вероятностная логика, Сб. статей, Автоматы, ИЛ, М., 1955. [4] *Э. Ф. Мур* и *К. Э Шеннон*, Надежные схемы из ненадежных реле. Кибернетический сборник, 1, ИЛ, М., 1960.