ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 3

МАТЕМАТИКА

С. Ц. Саркисян

Свойства решений систем Коши—Римана с нелинейными правыми частями

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/XII 1962)

Разнообразные задачи математики и механики приводят к изучению свойств решений систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка более общих, чем система Коши—Римана.

Один из важных классов таких систем составляют системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=f_1(x,\ y,\ u,\ v),\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=f_2(x,\ y,\ u,\ v),\tag{1}$$

или в векторном обозначении

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=f(z,\ w),\tag{1*}$$

где

$$z=x+iy,\quad w=u+iv,\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad \text{и}\quad f=f_1+if_2$$

известные функции.

Однако, в то время как системы вида (2) с линейными правыми частями

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=Aw+B\bar w\tag{2}$$

(где A, B — известные функции от z) весьма хорошо изучены и в работах И. Н. Векуа, Л. Берса и др. развита весьма полная их теория, системы вида (1) с нелинейными правыми частями еще не изучены.

В настоящей работе для некоторых простейших случаев нелинейных систем вида (1) устанавливается ряд свойств решений, аналогичных свойствам решений систем вида (2), а также указываются примеры явлений, связанных с нелинейностью.

1°. Здесь мы рассмотрим системы вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=Aw^2+Bw\bar w+C\bar w^2,\tag{3}$$

где коэффициенты A, B, C — функции переменной z, заданные в некоторой области G и принадлежащие к $L_p(G)$ $p>2$.

Будем говорить, что $w(z)$ является обобщенным решением системы (3) в окрестности точки z_0, если в некоторой окрестности G_0 этой точки w обладает обобщенными производными в смысле Соболева ([1]), которые суммируемы со степенью $p>1$ и удовлетворяют системе (3) почти везде в G_0. Если w удовлетворяет системе (3) в окрестности каждой точки области G, исключая, быть может, точек некоторого дискретного относительно G множества G_w^*, то будем говорить, что w является обобщенным решением системы (3) в области G. Множество G_w^*, которое содержит лишь изолированные точки, вообще говоря, зависит от выбора w. Если G_w^* — пустое множество, то обобщенное решение w будем называть регулярным решением системы (3) в области G. Но так как из суммируемости обобщенных производных следует непрерывность функции в G ([1]), то регулярное в области G решение непрерывно в G и удовлетворяет системе (3) почти везде в G.

Для решений систем (3), регулярных в G, имеет место.

Теорема 1 (аналог теоремы Карлемана). *Если для регулярного решения $w(z)$ системы (3) существует точка $z_0 \in G$, являющаяся предельной точкой для нулей $w(z)$, то $w(z)=0$ в G.*

Эта теорема доказывается немного измененным методом Карлемана.

2°. Приведем теперь одно интегральное представление регулярных решений системы (3) в G.

Лемма 1. Пусть w — регулярное в G решение системы (3) и пусть

$$A_0(z)=\begin{cases} A(z)+B(z)\dfrac{\overline{w}}{w}+C(z)\dfrac{\overline{w}^2}{w^2}, & \text{если } w(z)\neq 0 \quad z\in G,\\ A(z)+B(z)+C(z), & \text{если } w(z)=0 \quad z\in G.\end{cases}$$

В таком случае функция

$$\varphi(z)=\frac{1}{w(z)}+\omega(z), \quad \text{где} \quad \omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{A_0(t)\,d\sigma}{t-z}, \tag{4}$$

является мероморфной в области G. Из леммы 1 сразу следует

Теорема 2. *Всякое регулярное в G решение системы (3) представимо в виде*

$$w(z)=\frac{1}{\varphi(z)-\omega(z)}, \tag{5}$$

где $\varphi(z)$ — мероморфная в G функция, а $\omega(z)$ — функция вида (4) *и, обратно, всякая функция вида* (6), *где $\varphi(z)$ — мероморфная в G, а $\omega(z)$ имеет вид* (5), *является регулярным решением системы* (3).

В частности, если $B \equiv C \equiv 0$, то формула (5) принимает следующий вид

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} \frac{A(t)\, d\sigma}{t - z}}. \tag{6}$$

Обобщенное решение системы (3) в области G является регулярным решением в $G - \overset{*}{G}_w$, где $\overset{*}{G}_w$ дискретное относительно G множество. Следовательно, обобщенное решение системы (3) в области G имеет вид (5), где функция $\varphi(z)$ в точках $\overset{*}{G}_w$ имеет любые изолированные особенности.

Точка z_0 расширенной плоскости $z = x + iy$, в окрестности $0 < |z - z_0| < r$ которой обобщенное решение системы (3) $w(z)$ непрерывно, называется устранимой особой точкой, если $\lim\limits_{z \to z_0} w(z)$ существует и конечен, полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} w(z)$ существует и равен бесконечности, существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z \to z_0} w(z)$ не существует.

3°. Здесь мы приведем некоторые свойства решений систем (3).

Теорема 3 (аналог теоремы Сохоцкого). *Если z_0 — существенно особая точка обобщенного решения $w(z)$ системы* (3) *в G, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_k \to z_0$, такая, что* $\lim\limits_{z_k \to z_0} w(z) = A$.

Теорема 4 (аналог теоремы Лиувилля). *Если w регулярное в открытой плоскости E решение системы* (3) *и $\left|\frac{1}{w}\right|$ ограничено на всей* (открытой) *плоскости, то $w(z)$ имеет вид*

$$w(z) = \frac{1}{C - \omega(z)}, \tag{7}$$

где $C = \mathrm{const}$, $\omega(z)$ — *функция* (4)

Функции вида (7) можно назвать обобщенными постоянными. В отличие от линейных систем, решения систем (3) могут равномерно стремиться к бесконечности при приближении к границе области. Это показывает следующий пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = -w^2. \tag{8}$$

Ясно, что $w = \dfrac{z}{z\bar{z} - 1}$ является регулярным решением системы (8) в единичном круге, но тем не менее $w(z)$ стремится равномерно к бесконечности при z, стремящемся к единичной окружности.

4°. Здесь рассматривается система вида

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = a_0(z)\sqrt{w}, \tag{9}$$

где $a_0(z)$ — заданная функция переменной z в некоторой области G, принадлежащая к $L_p(G)$, $p > 2$.

Регулярные и обобщенные решения системы (9) определяются так же, как и для системы (3), но для простоты мы здесь ограничимся рассмотрением лишь тех решений этой системы, которые в окрестности G_0 точки $z_0 \in G$ представляют собой квадрат непрерывных в G_0 однозначных функций. Под $\sqrt{w}$ мы будем понимать именно такую функцию. Приведем теперь одно представление обобщенных решений системы (9).

Лемма 2. Пусть w — обобщенное решение системы (9) с коэффициентом $a_0 \in L_p(G)$ в области G. В таком случае функция

$$\varphi(z) = \sqrt{\overline{w(z)}} - \omega(z), \tag{10}$$

где

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_G \frac{a_0(t)}{t-z}\, d\sigma, \tag{10'}$$

является однозначной аналитической в области G всюду, за возможным исключением множества G_w^* особых точек w^*.

Теорема 5. *Всякое обобщенное решение системы* (9) *в области имеет вид*

$$w(z) = [\varphi(z) + \omega(z)]^2, \tag{11}$$

где $\varphi(z)$ — *аналитическая всюду в* G, *кроме, может быть, изолированных особенностей, функция, а* $\omega(z)$ — *функция вида* (10′) *в* G *и, обратно, всякая функция вида* (11), *где* $\varphi(z)$ — *аналитическая (с изолированными особенностями) функция, а* $\omega(z)$ — *функция вида* (10′) *в* G, *является обобщенным решением системы* (9).

4°. Следующий пример показывает, что теорема Карлемана для регулярных решений систем вида (9) неверна. В самом деле, рассмотрим систему

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = -2\sqrt{w}. \tag{12}$$

Ясно, что функция $w(z) = (z - \bar z)^2$ является регулярным решением системы (12) в области G, содержащей некоторый отрезок оси Oy, но тем не менее нули $w(z)$ заполняют этот отрезок.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 6. *Если* $a_0(z)$ — *голоморфная функция в* G, $w(z)$ *является регулярным решением системы* (9) *и нули* $\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial z}$ *имеют в* G *предельную точку, то* $w(z) \equiv 0$**.

---

* Если $w(z)$ — регулярное решение, то $\varphi(z)$ — голоморфная функция в области G.

** В этом условии нельзя заменить $\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial z}$ на $\frac{\partial w}{\partial z}$, так как $\frac{\partial w}{\partial z}$ может обращаться в нуль на кривых. Это видно из примера решения $w = (z + \bar z)^2$ системы (9) при $a_0(z) = 2$.

Теорема 7. *Если $a_0(z)$ — аналитическая функция двух действительных переменных x и y $(x+iy=z)$ в G, $w(z)$ — регулярное решение системы* (9) *в этой области и $w(z)=0$ на множестве, имеющем внутреннюю точку, то $w(z)\equiv 0$ в G.*

Для произвольных непрерывных функций в области G теоремы 6 и 7 неверны. В самом деле, пусть $a_0(z)=0$ в G_0, $u \neq 0$ в $G \setminus G_0$ и непрерывная в G функция. Из (11) ясно, что регулярное решение $w(z)$ системы $\frac{\partial w}{\partial \bar z} = a_0(z)\sqrt{w}$ в G равно нулю в G_0 и не равно нулю в $G \setminus G_0$.

Следуя М. Б. Балку [3], введем теперь понятие точек сгущения порядка n для произвольного множества E' точек.

Пусть E' — произвольное множество точек, ξ — какая-либо точка (не обязательно из E'), l — луч $\arg(z-\xi)=\alpha$, исходящий из ξ. Множество E' назовем сгущающимся к точке ξ вдоль луча l, если в E' содержится такая последовательность точек $\{z_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg(z_n-\xi)=\alpha$. Пусть теперь a — произвольная прямая, проходящая через точку ξ. Множество E' назовем сгущающимся к точке ξ вдоль прямой a, если оно сгущается к ξ хотя бы вдоль одного из лучей, на которые разбивается прямая a точкой ξ.

Точку ξ назовем точкой сгущения порядка n для множества E', если E' сгущается к точке ξ не менее, чем вдоль n различных прямых.

Теорема 8. *Пусть $a_0(z)$ — голоморфная функция в области G и пусть $w(z)$ — регулярное решение системы* (9) *в той же области G. Если $w(z)$ обращается в нуль на множестве $E' \subset G$, имеющем в G точку сгущения порядка 2, то $w(z)=0$ в G.*

5°. Если изолированные особенности решения системы (9) классифицировать так же, как для решений систем (3), то оказывается, что имеет место теорема, аналогичная теореме Сохоцкого.

Обобщается также несколько классических теорем.

Теорема 9 (принцип максимума). *Если $a_0(z) \in L_{p,2}(G)$, $p>2$ и $w(z)$ — регулярное решение системы* (9), *непрерывное в $\bar G$, то*

$$w(z) \leq [\tilde{M} + \max|\sqrt{w(t)}|]^2, \quad z \in G+\Gamma, \tag{13}$$

где Γ — граница области G, $\tilde{M}$ — положительная постоянная, которая зависит исключительно от a_0 и p.

Теорема 10 (аналог теоремы Лиувилля). *Если $a_0 \in L_{p,2}(E)$ и регулярное во всей (открытой) плоскости решение $w(z)$ системы* (9) *ограничено*, то $w(z)$ имеет вид*

$$w(z) = [c+\omega(z)]^2, \tag{14}$$

где c — постоянная величина.

* В отличие от линейных систем регулярное решение может быть и обращается в нуль в некоторой фиксированной точке z_0 плоскости.

Функции вида $|c + \omega(z)|^2$ мы назовем обобщенными постоянными (при $a_0(z) = 0$ правая часть (14), очевидно, равна постоянной). Введем также понятие обобщенного полинома и обобщенной рациональной функции. Функцию вида (11) мы будем называть обобщенной рациональной функцией, если $\sqrt{\overline{w}(z)}$ имеет конечное число полюсов на расширенной плоскости. В таком случае в формуле (11) функция $\varphi(z)$ есть рациональная функция, полюсы которой совпадают с полюсами соответствующей обобщенной рациональной функции. Если обобщенное решение системы (9) имеет единственный полюс $z = \infty$, то его будем называть обобщенным полиномом. В таком случае порядок полюса будем называть степенью обобщенного полинома. Обобщенные полиномы нулевой степени будут обобщенными постоянными.

Теорему 10 можно обобщить следующим образом.

Теорема 11. *Если* $w(z)$ — *регулярное решение системы* (9) *с коэффициентом* $a_0(z) \subset L_{p,2}(E)$ *в* E *и* $\sqrt{\overline{w}} = O(|z|^n)$ *вблизи точки* $z = \infty$, *где* n — *целое неотрицательное число, то* $w(z)$ *есть обобщенный полином* n.

Настоящая работа выполнена под руководством Б. В. Шабата, которому автор приносит глубокую благодарность.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ծ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ոչ գծային աջ մասերով Կոշի-Ռիմանի սիստեմների լուծումների մի քանի հատկություններ

Դիտարկվում է հետևյալ տիպի սիստեմները

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw^2 + Bw\overline{w} + C\overline{w}^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a\sqrt{\overline{w}},$$

որտեղ A, B, C, a — *ֆունկցիաներ են* z *փոփոխականից կամայական* G-*տիրույթում։ Գտնված են մի շարք կլասիկ թեորեմների (Սոխոցկու, Լիուվիլի և այլն) անալոգները այդ սիստեմների լուծումների դասում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950. [2] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, М., 1950. [3] *М. Б. Балк*, К теории полианалитических функций, Тезизы докладов Пятой всесоюзной конференции по теории функций, Ереван, 1960.