

МАТЕМАТИКА

Н. Д. Пецко

Проективные мероопределения и комплексные числа

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 26/XI 1962)

Применению комплексных чисел трех видов — обычных комплексных чисел $a + bi$ ($i^2 = -1$), двойных чисел $a + be$ ($e^2 = 1$), дуальных чисел $a + b\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$) — ко всевозможным двумерным пространствам с проективной метрикой посвящена работа И. М. Яглома ⁽¹⁾. В настоящей работе результаты работы ⁽¹⁾ обобщаются на широкий класс пространств с проективной метрикой произвольной размерности.

1. Всякая прямая линия n -мерного эллиптического пространства S_n ⁽²⁾, стр. 151) пересекает его мнимый абсолют, совпадающий с абсолютом комплексного пространства $S_n(i)$ ⁽²⁾, стр. 159), в двух мнимосопряженных точках. Если мы будем различать ориентацию прямых пространства S_n , то получим, что *многообразие ориентированных прямых пространства S_n взаимно однозначно изображается точками абсолюта комплексного пространства $S_n(i)$* . При этом группа движений пространства S_n изображается подгруппой группы движений пространства $S_n(i)$, переводящей в себя пространство S_n , погруженное в $S_n(i)$ в виде многообразия действительных точек.

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости S_2 на комплексной проективной прямой, т. е. изображению самой плоскости S_2 на расширенной плоскости комплексного переменного ⁽²⁾, стр. 416—420 и 484—486).

2. В n -мерном гиперболическом пространстве $'S_n$ ⁽²⁾, стр. 151) все прямые, за исключением изотропных прямых (т. е. прямых, касающихся абсолюта), делятся на два класса: *эллиптические прямые* — прямые, не пересекающиеся с абсолютом, и *гиперболические прямые* — прямые, пересекающие абсолют в двух точках.

Всякая эллиптическая прямая пространства $'S_n$ пересекает его абсолют в двух мнимосопряженных точках. Но мнимые точки абсолюта вместе с его действительными точками составляют абсолют пространства $S_n(i)$. Поэтому *многообразие ориентированных эллиптических прямых пространства $'S_n$ взаимно однозначно изобра-*

жаются точками абсолюта комплексного пространства $S_n(i)$, отличными от точек абсолюта пространства 1S_n , погруженного в пространство $S_n(i)$ в виде многообразия действительных точек. При этом группа движений пространства 1S_n изображается подгруппой группы движений пространства $S_n(i)$, переводящей в себя пространство 1S_n .

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости 1S_2 положительной кривизны на комплексной проективной прямой, т. е. интерпретации Пуанкаре плоскости Лобачевского на плоскости комплексного переменного ((²), стр. 421—423 и 484—487).

3. Всякая гиперболическая прямая пространства 1S_n пересекает его абсолют в двух действительных точках, которые можно изобразить одной точкой абсолюта гиперболического пространства ${}^1S_n(e)$, над двойными числами $a + be$, $e^2 = +1$. Поэтому многообразие ориентированных гиперболических прямых пространства 1S_n взаимно однозначно изображается точками абсолюта двойного пространства ${}^1S_n(e)$, отличными от точек абсолюта пространства 1S_n , погруженного в пространство ${}^1S_n(e)$ в виде многообразия действительных точек. При этом группа движений пространства 1S_n изображается подгруппой группы движений пространства ${}^1S_n(e)$, переводящей в себя пространство 1S_n .

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости Лобачевского на двойной проективной прямой, т. е. изображению плоскости 1S_2 положительной кривизны на расширенной плоскости двойного переменного ((²), стр. 420—423 и 484—487).

4. Так как n -мерное евклидово пространство R_n может быть получено предельным переходом и из эллиптического пространства S_n и из гиперболического пространства 1S_n , причем прямые пространства R_n получаются предельным переходом из прямых пространства S_n и гиперболических прямых пространства 1S_n , а многообразия ориентированных прямых пространства S_n и ориентированных гиперболических прямых пространства 1S_n , как мы видели, взаимно однозначно изображаются точками абсолютов пространства $S_n(i)$, которое можно рассматривать как пространство ${}^1S_n(i)$ и пространство ${}^1S_n(e)$, то ориентированные прямые пространства R_n можно изобразить точками абсолюта гиперболического пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$ над дуальными числами $b + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$. Тогда многообразие ориентированных прямых евклидова пространства R_n взаимно однозначно изображается парами точек абсолюта дуального пространства Лобачевского ${}^1S_n(\varepsilon)$, переводящимися друг в друга преобразованием $\xi^0 = \bar{\xi}^0$, $\xi^{\alpha} = -\bar{\xi}^{\alpha}$ ($\alpha > 0$). При этом группа движений пространства R_n изображается подгруппой группы движений пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$, переводящей в себя многообразие точек, удовлетворяющих условию $\xi^0 = \bar{\xi}^0$, $\xi^{\alpha} = -\bar{\xi}^{\alpha}$ ($\alpha > 0$).

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости R_2 на дуальной проективной прямой, т. е. на плоскости дуального переменного, предложенному И. М. Ягломом (¹).

5. В n -мерном квазиэллиптическом пространстве S_n^I (³) все прямые делятся на три класса: эллиптические прямые первого рода — прямые, не пересекающиеся с абсолютной плоскостью, эти прямые пересекают абсолютный конус в двух точках, эллиптические прямые второго рода — прямые, целиком лежащие на абсолютной плоскости, эти прямые пересекают абсолютную квадрику в двух точках, и евклидовы прямые — прямые, пересекающие абсолютную плоскость в одной точке.

Так же, как в случае пространства S_n , показывается, что многообразие ориентированных эллиптических прямых первого рода пространства S_n взаимно однозначно изображается точками абсолютного конуса комплексного пространства $S_n^I(i)$, отличными от точек вершинной плоскости абсолютного конуса. При этом группа движений пространства S_n^I изображается подгруппой группы движений пространства $S_n^I(i)$, переводящей в себя пространство S_n^I , погруженное в пространство $S_n^I(i)$ в виде многообразия действительных точек.

При $n = 2$ это изображение равносильно изображению многообразия прямых плоскости, соответствующей евклидовой плоскости, R_2 по принципу двойственности на комплексной проективной прямой, т. е. обычному представлению плоскости R_2 на плоскости комплексного переменного.

Вершинная плоскость абсолютного конуса пространства S_n^I , т. е. абсолютная плоскость этого пространства, представляет собой эллиптическое пространство S_{n-1} . Поэтому многообразие ориентированных эллиптических прямых второго рода пространства S_n^I взаимно однозначно изображается точками абсолютной квадрики пространства $S_n^I(i)$, т. е. точками абсолюта пространства $S_{n-1}(i)$.

6. Квазиэллиптическое пространство S_n^I может быть получено предельным переходом и из эллиптического пространства S_n и из гиперболического пространства ${}^I S_n$, причем эллиптические прямые пространства S_n^I получаются предельным переходом из прямых пространства S_n и эллиптических прямых пространства ${}^I S_n$, а евклидовы прямые пространства S_n^I получаются предельным переходом из прямых пространства S_n и гиперболических прямых пространства ${}^I S_n$. Так как многообразия ориентированных прямых пространства S_n и ориентированных гиперболических прямых пространства ${}^I S_n$ взаимно однозначно изображаются точками абсолютов пространств $S_n(i)$, которые можно рассматривать как пространство ${}^I S_n(i)$ и пространство ${}^I S_n(l)$, то ориентированные евклидовы прямые пространства S_n^I можно изо-

-бразить точками абсолюта дуального гиперболического пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$. Это изображение уже не может быть взаимно однозначным, так как точки абсолюта пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$ зависят от $2(n-1)$ действительных параметров, а евклидовы прямые пространства S_n^l зависят от $2(n-1)-l$ действительных параметров. Будем называть l -цепями многообразия точек абсолюта пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$, координаты ξ^a которых имеют вид $x^a + \varepsilon y_0^a$, где x^a — произвольные действительные числа, y_0^a — постоянные действительные числа, а координаты $\bar{\xi}_0^a$ — постоянные дуальные числа. Эти многообразия l -мерны, так как $l+1$ чисел x^a связаны одним условием нормирования. Тогда многообразие ориентированных евклидовых прямых квазиэллиптического пространства S_n^l взаимно однозначно изображаются l -цепями на абсолюте дуального пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$. При этом группа движений пространства S_n^l изображается подгруппой группы движений пространства ${}^1S_n(\varepsilon)$, переводящей в себя многообразие точек, удовлетворяющих условию

$$\xi^a = \bar{\xi}^a, \quad \xi^u = -\bar{\xi}^u.$$

Коломенский педагогический институт

Ն. Դ. ՊԵՅԿՈ

Պրոեկտիվ մեթոդական և կոմպլեքս բվերը

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ n -չափանի էլիպտական տարածություն, կողմնորոշված ուղիղների, n -չափանի հիպերբոլական տարածություն կողմնորոշված էլիպտական և հիպերբոլական ուղիղների, n -չափանի էվկլիդյան տարածություն կողմնորոշված ուղիղների և n -չափանի քվադրիէլիպտական տարածություն կողմնորոշված էլիպտական և էվկլիդյան ուղիղների բաղմամբությունը փոխմիարժեք պատկերվում է համապատասխանաբար n -չափանի կոմպլեքս ոչ էվկլիդյան տարածություն (սուսճին երկու դեպքում), n -չափանի կրկնակի և դուալ հիպերբոլական տարածություն, n -չափանի կոմպլեքս քվադրիէվկլիդյան տարածություն և l -շղթաների դուալ n -չափանի հիպերբոլական տարածություն բացարձակի վրա:

Այս արդյունքի մասնավոր դեպքը՝ երբ $n=2$ հափառաբար է ոչ էվկլիդյան, էվկլիդյան և քվադրիէլիպտական հարթությունների բաղմամբություն կոմպլեքս, կրկնակի և դուալ փոփոխականների միջոցով արդեն հայտնի մեկնարանությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. М. Яглом, Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 7, 1947, стр. 276—318. ² Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии, М., 1955. ³ Б. А. Розенфельд, Квазиэллиптические пространства. Труды Московского математического общества, т. 8, 1959, стр. 49—70.