ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 3

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре некоторых несамосопряженных операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/X 1962)

В заметке приводится ряд теорем о спектре несамосопряженных возмущений самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида.

Пусть A — несамосопряженный (неограниченный) линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Следуя Денфорду, будем говорить, что точка $\lambda = \lambda_0$ является точкой непрерывного спектра оператора A, если λ_0 не является собственным значением этого оператора и многообразие $(A - \lambda_0 E) D_A$, где D_A — область определения оператора A, всюду плотно и незамкнуто.

Следующее предложение является обобщением теоремы 1 из заметки автора (1).

Теорема 1. *Пусть R_λ — резольвента несамосопряженного линейного оператора A (неограниченного) в гильбертовом пространстве H и S — ограниченный линейный оператор (несамосопряженный). Точка λ_0 непрерывного спектра оператора A остается точкой непрерывного спектра оператора $T = A + S^2$, если существует такая последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$, для которой*

$$\sup \| (\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n} \| < \infty \tag{1}$$

и

$$\lim \sup \| S R_{\lambda_n} S \| = q < 1. \tag{2}$$

Регулярная точка $\lambda = \lambda_0$ оператора A остается регулярной точкой оператора $T = A + S^2$, если $\| S R_{\lambda_0} S \| < 1$.

Замечание. Если A — нормальный оператор (т. е. D_A плотно в H и $AA^* = A^*A$), то, как известно, $\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{d_\lambda}$, где d_λ — расстояние от λ до спектра оператора A. Поэтому в этом случае условие (1) можно снять и потребовать, чтобы (2) имело место для последовательности λ_n, приближающейся к λ_0, в направлении, не касательном к спектру оператора A в точке λ_0, точнее, для последовательности λ_n, для которой

$$\sup \frac{|\lambda_n - \lambda_0|}{d_{\lambda_n}} < \infty.$$

Обозначим, далее, через E_n все n-мерное вещественное евклидово пространство. Пусть K_n — многообразие всех финитных неограниченно дифференцируемых комплексных функций, определенных на E_n. Определим на K_n дифференциальный оператор произвольного порядка m с постоянными коэффициентами формулой

$$Au = \sum_{0 \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (i)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad u \in K_n, \tag{3}$$

или, короче,

$$Au = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \quad u \in K_n, \tag{4}$$

где

$$P(s) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}. \tag{5}$$

Здесь коэффициенты $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ предполагаются вещественными постоянными. Очевидно, оператор A симметрический. Как показано в [1], в пространстве $L_2(E_n)$ индексы дефекта оператора A $(D_A = K_n)$, определенного формулой (4), равны (0,0). В дальнейшем под оператором

$$Au = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \qquad u \in \Omega_n, \tag{6}$$

будем понимать замыкание оператора (4) и через Ω_n будем обозначать область его определения. Легко видеть, что спектр оператора A чисто непрерывен и совпадает с множеством значений полинома $P(s)$, когда s пробегает все пространство E_n.

Доказательство приводимых в этой заметке теорем существенно опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *В $L_2(E_n)$ оператор умножения на комплекснозначную непрерывную функцию $q(x)$, стремящуюся к нулю на бесконечности, A — вполне непрерывен, где самосопряженный оператор A определен формулой (6).*

Лемма 2. *Пусть комплекснозначная измеримая функция $q(x)$ ограничена и $q(x) \in L_2(E_n)$. Пусть, далее, R_λ — резольвента оператора A, определенного формулой (6). Тогда норма оператора $qR_\lambda q$, состоящего в том, что функция $u \in L_2(E_n)$ умножается на $q(x)$, к произведению qu применяется оператор R_λ и полученный результат вновь умножается на $q(x)$, допускает оценку*

$$\| qR_\lambda q \| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sup \left| \int_E \frac{e^{-i(t,\, x)} dt}{P(t) - \lambda} \right| \| q \|^2. \tag{7}$$

Чтобы сформулировать следующую лемму, предположим, что полином $P(s)$ имеет вид

$$P(s) = P(s_1^2 + \cdots + s_n^2), \tag{8}$$

где $P(r^2)$ — произвольный полином от одной переменной $r^2 = s_1^2 + \cdots + s_n^2$. Тогда спектр оператора

$$Au = P(-\Delta)\, u, \qquad u \in \Omega_n, \tag{9}$$

определяемого таким же образом, как и более общего вида оператор (6), чисто непрерывен и состоит из тех и только тех λ, для которых при некотором $r^2 \geqslant 0$ имеем $P(r^2) - \lambda = 0$. Пусть $r_1, r_2, \cdots, r_k$ — все отличные друг от друга неотрицательные нули полинома $2rP'(r^2) = \frac{d}{dr} P(r^2)$. Положим $\lambda_k = P(r_k^2)$ и через Λ будем обозначать совокупность этих λ_k

$$\Lambda = \{\lambda_k : \ \lambda_k = P(r_k^2), \ \ 2r_k P'(r_k) = 0\}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть R_λ — резольвента оператора A, определенного формулой (9), а комплекснозначная измеримая функция $q(x)$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству*

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad C = \text{const}. \tag{11}$$

Пусть, далее, λ_0 — точка спектра оператора A и $\lambda_0 \in \Lambda$, где множество Λ определено формулой (10). Тогда некоторая окрестность точки λ_0 в комплексной плоскости разбивается спектром оператора A на две области G_1 и G_2 и оператор $qR_\lambda q$, рассматриваемый в одной из них (например, в G_1), допускает аналитическое продолжение по λ в другую область ($\lambda \in G_2$).

Замечание. Заметим, что точки множества Λ для оператора $qR_\lambda q$ могут оказаться точками ветвления. Пусть, например, полином $P(t)$ от одной переменной t имеет вид $P(t) = t^2$, т. е. $Au = -u''$ на всей вещественной оси. Тогда, как легко видеть, оператор $qR_\lambda q$ имеет вид

$$qR_\lambda qu = -\int_{-\infty}^{\infty} q(x) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-t|}}{2i\sqrt{\lambda}} q(t)\, u(t)\, dt$$

и не допускает аналитического продолжения через точку $\lambda = 0$. Ясно, что при этом множество Λ состоит из этой единственной точки $\lambda = 0$.

Ниже мы будем предполагать, что полином $P(s)$ с вещественными коэффициентами, определенный формулой (5), удовлетворяет условию

$$\lim_{R \to \infty} \inf_{|s| > R} |P(s)| = \infty. \tag{12}$$

Мы будем интересоваться характером спектра возмущенного оператора вида $Tu = Au + qu$, $u \in \Omega_n$, где функция $q(x)$ — комплекснозначная. Следующая теорема носит общий характер и в некотором смысле обобщает известный результат В. Б. Лидского ([2]) для возмущенного оператора Лапласа.

Теорема 2. *Пусть оператор A определен формулой (6) и удовлетворяет условию (12), а $q(x)$ — комплекснозначная непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Тогда весь спектр оператора A содержится в спектре возмущенного оператора $Tu = Au + qu$, и Ω_n. Точки спектра оператора T, лежащие вне спектра оператора A, могут быть лишь собственными значениями конечной кратности, не имеющими предельных точек вне спектра оператора A.*

Чтобы сформулировать следующие теоремы, необходимо наложить дополнительные ограничения на оператор A. Мы будем предполагать, что оператор A определен формулой (9), где полином $P(r^2)$ имеет вещественные коэффициенты. Условие (12), очевидно, выполняется.

Теорема 3. *Пусть самосопряженный оператор A определен формулой (9), а множество Λ — формулой (10). Пусть, далее, комплекснозначная измеримая функция $q(x)$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству*

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad C = \text{const}. \tag{13}$$

Тогда собственные значения оператора $Tu = Au + qu$ (включая и те, которые лежат на спектре оператора A) могут сгущаться лишь к точкам множества Λ и к бесконечности.

Доказательство опирается на следующие два предложения. Если через Φ_λ обозначить оператор, существующий согласно лемме 3 в некоторой окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ и совпадающий с оператором $\sqrt{q}R_\lambda\sqrt{q}$ для тех λ из этой окрестности, которые лежат в верхней полуплоскости, а для остальных λ из этой окрестности совпадающий с аналитическим продолжением оператора $\sqrt{q}R_\lambda\sqrt{q}$, то оператор Φ_λ вполне непрерывен в полной окрестности точки $\lambda = \lambda_0$. С другой стороны, если λ_0 принадлежит спектру оператора A и является собственным значением оператора $Tu = Au + qu$, то

$$\underset{\tau \to 0}{\text{l.i.m.}}\,(E + \sqrt{q}R_{\lambda_0 + i\tau}\sqrt{q})v = 0 \qquad (\operatorname{Im}\tau = 0)$$

при некотором v, $\|v\| > 0$.

Теорема 4. *Пусть самосопряженный оператор A определен формулой (9) и пусть степень многочлена $P(r^2)$ больше размерности n нечетномерности пространства E_n. Если ограниченная, измеримая, комплекснозначная функция $q(x)$ суммируема, то весь дискретный спектр оператора $Tu = Au + qu$ (включая собственные значения, лежащие на спектре оператора A) ограничен, причем вне некоторого круга комплексной плоскости с центром в начале координат спектр оператора T чисто непрерывен и совпадает со спектром оператора A.*

Доказательство основано на лемме 2 и равномерном по x стремлении к нулю интеграла

$$\int_{E_n} \frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}}{P(t_1^2+\cdots+t_n^2)-\lambda}\,dt$$

при стремлении $|\lambda|$ к бесконечности.

Заметим, что теорема 4 еще не дает возможности утверждать, что дискретный спектр оператора $Tu = Au + qu$ конечен, даже если $q(x)$ удовлетворяет условию (13) теоремы 3. Это связано с тем, что точки множества Λ могут оказаться предельными для собственных значений оператора T. Даже в простейшем случае полигармонического оператора, когда множество Λ состоит из единственной точки $\lambda = 0$, не ясно, как можно обойти возникающие здесь трудности путем сколько-нибудь общих соображений. Тем не менее, в этом случае дискретный спектр оказывается конечным. Например, для бигармонического оператора в трехмерном пространстве справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть измеримая и определенная на всем трехмерном евклидовом пространстве E_3 функция $q(x)$ при некотором $\varepsilon>0$ удовлетворяет условию*

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \qquad C = \text{const}.$$

Тогда множество собственных значений (включая и положительные) оператора $Tu = \Delta\Delta u + qu$ конечно. Остальная часть спектра оператора T чисто непрерывна и состоит из всех точек положительной полуоси, не являющихся собственными значениями оператора T.

При доказательстве используется аппарат Фредгольма в несколько видоизмененной форме. Именно, пусть измеримая функция $\Phi(x, y)$ ограничена, а $q(x) \in L(E)$, $q(x) \in L_2(E)$, где E — неограниченная область евклидова пространства. Тогда ряд

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n,$$

определяющий знаменатель Фредгольма для ядра $\Phi(x, y)\,q(y)$, сходится на всей λ-плоскости и если $D(\lambda_0) \neq 0$, то уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_E K(x, y)\,u(y)\,dy, \qquad u \in L_2(E),$$

где $K = \Phi q$,

имеет лишь тривиальное решение в пространстве $L_2(E)$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Մի քանի ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների սպեկտրի մասին

Աշխատանքի հիմնական արդյունքները բերվում են հետևյալին.

Թեորեմ 1: Դիցուկ R_λ-ն Հիլբերտյան տարածության մեջ ոչ ինքնահամալուծ փակ գծային անսահմանափակ A օպերատորի ռեզոլվենտան է և S-ը սահմանափակ գծային օպերատոր է (ոչ ինքնահամալուծ) A օպերատորի անընդհատ սպեկտրին պատկանող λ_0 կետը մնում է $T = A + S^2$ օպերատորի անընդհատ սպեկտրի կետ, եթե գոյություն ունի այնպիսի λ_n հաջորդականություն, որի համար

$$\sup \| (\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n} \| < \infty,$$

$$\limsup \| S R_{\lambda_n} S \| = q < 1.$$

A օպերատորի $\lambda = \lambda_0$ ռեգուլյար կետը մնում է T օպերատորի ռեգուլյար կետ, եթե

$$\| S R_{\lambda_0} S \| < 1.$$

Այնուհետև նշանակենք E_n-ով n — չափանի իրական էվկլիդյան տարածությունը: Դիցուկ K_n-ը E_n-ում սահմանված բոլոր ֆինիտ անվերջ դիֆերենցիալ կոմպլեքս ֆունկցիաների բազմությունն է: Սահմանենք K_n-ում հաստատուն գործակիցներով կամայական m կարգի դիֆերենցիալ օպերատոր հետևյալ բանաձևով

$$Au = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \qquad u \in K_n, \tag{1}$$

որտեղ

$$P(s) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < m} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

և $a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ գործակիցները իրական հաստատուններ են:

Հեղինակի աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ հետազոտվող օպերատորի դեֆեկտի ինդեքսը հավասար է (0, 0) և այդ իսկ պատճառով A օպերատորի տակ կհասկանանք (1) բանաձևով որոշված օպերատորի ինքնահամալուծ ընդլայնումը

$$Au = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \qquad u \in \Omega_n, \tag{3}$$

և Ω_n-ով կնշանակենք նրա որոշման տիրույթը: Մենք նաև կենթադրենք, որ (2) բանաձևով որոշվող $P(s)$ բազմանդամը բավարարում է

$$\lim_{R \to \infty} \inf_{|s| > R} | P(s) | = \infty \tag{4}$$

պայմանին:

Վերջապես, եթե $P(s)$ բազմանդամը ունի

$$P(s) = P(s_1^2 + \cdots + s_n^2) \tag{5}$$

տեսք, որտեղ $P(r^2)$-ն $r^2 = s_1^2 + \cdots + s_n^2$ փոփոխականի կամայական բազմանդամն է, ուսումնասիրենք Λ բազմանդամը, սահմանված հետևյալ կերպ: Դիցուկ $r_1, \ldots, r_k$-ն $\frac{d}{dr} P(r^2)$ բազմանդամի իրարից տարբեր ոչ բացասական արմատներն են: Նշանակենք Λ-ով λ_k-երի համախումբը, որտեղ $\lambda_k = P(r_k^2)$.

Թեորեմ 2։ Դիցուկ A օպերատորը սահմանված է (3) բանաձևով և բավարարում է (4) պայմանին, իսկ $q(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է զրոյի ձգտող և կոմպլեքս արժեքներ ընդունող։ Այդ դեպքում A օպերատորի ամբողջ սպեկտրը ընդգրկվում է $Tu=Au+qu$, $u \in \Omega_n$, օպերատորի սպեկտրի մեջ։ T օպերատորի սպեկտրի կետերը, որոնք չեն պատկանում A օպերատորի սպեկտրին, կարող են հանդիսանալ միայն վերջավոր պատիկություն ունեցող սեփական արժեքներ, որոնք չունեն սահմանային կետեր A օպերատորի սպեկտրից դուրս։

Թեորեմ 3։ Դիցուկ A օպերատորը սահմանված է (3) բանաձևով և $P(s)$ բազմանդամը ունի (5) տեսքը, դիցուկ այնուհետև կոմպլեքս արժեք ընդունող, չափելի $q(x)$ ֆունկցիան որևէ $\varepsilon > 0$-ի դեպքում բավարարում է

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad C = \text{const.},$$

պայմանին։

Այդ դեպքում $Tu=Au+qu$ օպերատորի սեփական արժեքները (ներառյալ և A օպերատորի սպեկտրին պատկանողները) կարող են խտանալ միայն Λ բազմության կետերում կամ անվերջում։

Թեորեմ 4։ Դիցուկ A ինքնահամալուծ օպերատորը որոշված է (3) բանաձևով, իսկ $P(s)$ բազմանդամը ունի (5) տեսքը։ Դիցուկ այնուհետև $P(r^2)$ բազմանդամի կարգը E_n էվկլիդյան տարածության չափողականությունից մեծ է։ Եթե $q(x)$-ը սահմանափակ չափելի կոմպլեքս արժեքներ ընդունող հանրագումարելի ֆունկցիա է, ապա $Tu=Au+qu$ օպերատորի ամբողջ դիսկրետ սպեկտրը (ներառյալ և A օպերատորի սպեկտրի վրա գտնվող սեփական արժեքները) սահմանափակ է, ընդ որում կոմպլեքս հարթության որոշ շրջանից դուրս, որի կենտրոնը սկզբնակետումն է, T օպերատորի սպեկտրը զուտ անընդհատ է և համընկնում է A օպերատորի սպեկտրի հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. М. Мартиросян*, ДАН АрмССР, т. XXXIV, № 2 (1962). [2] *В. Б. Лидский*, ДАН СССР, т. 112, № 6 (1957).