ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVI 1963 2

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

О поверхностях D_m пространства K_n

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 30/X 1962)

1. Будем говорить, что поверхность X_m в проективном пространстве P_n нормализована двойственно, если она нормализована в смысле А. Н. Нордена ([1]) и ее нормаль первого рода содержит характеристику семейства гиперплоскостей, касающихся X_m.

В этой заметке мы рассмотрим поверхность X_m, вложенную в пространство постоянной кривизны K_n, т. е. в проективное пространство с заданным абсолютом Q_{n-1}. Как известно, ([1]) для того чтобы нормализация была полярной относительно абсолюта Q_{n-1}, необходимо и достаточно, чтобы нормали первого и второго рода были полярно-сопряженными относительно абсолюта.

Допустим, что X_m можно дополнить до гиперполосы так, чтобы характеристики семейства касательных гиперплоскостей были перпендикулярны к касательной плоскости поверхностей X_m. Очевидно, что тогда естественная нормализация X_m будет одновременно и двойственной.

Иными словами, нормаль первого рода X_m предполагается вполне ортогональной к касательной плоскости поверхности и одновременно удовлетворяет условиям двойственной нормализации ([2]).

При этом оказывается, что X_m, удовлетворяющая этим условиям при $m < n-1$, образует определенный класс, который в дальнейшем будем обозначать через D_m.

Пусть точка поверхности D_m определяется вектором

$$\overline{x} = \overline{x}(u^1, u^2, \cdots u^m),$$

который мы будем предполагать нормированным по Вейерштрассу, т. е. удовлетворяющим условиям $\overline{x}^2 = \varepsilon = \pm 1$.

Обозначим через $\overline{X}$ *полюс главной плоскости* D_m, а через $\overline{X}_s$ полюсы касательных гиперплоскостей, пересекающихся по характеристикам главных плоскостей. Назовем $\overline{X}$ *главным полюсом*, а X_s *харак-*

теристическими полюсами. Тогда основные дифференциальные уравнения D_m имеют вид

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{I.} & \nabla_j \bar{x}_i = -\varepsilon g_{ij} \bar{x} + h_{ij} \bar{X} + \overset{s}{h}_{ij} \underset{s}{\bar{X}}, \\[2ex]
\text{II.} & \nabla_j \underset{s}{\bar{X}} = -\underset{s}{h}{}_j^k \bar{x} + \underset{s}{\overset{t}{n}}{}_j \underset{t}{\bar{X}}, \\[2ex]
\text{III.} & \bar{X}_j = -\varepsilon_1 h_j^e \bar{x}_e,
\end{array}
\right| \qquad (1)
$$

где считается, что номер внизу под точкой опущен с помощью g_{st}, а ∇ символ ковариантного дифференцирования во внутренней римановой связности, который используется для перебрасывания индексов.

По сравнению, с общим случаем у D_m, нормализованной двойственно, в разложениях характеристических полюсов $\underset{s}{\bar{X}}$ (I, II) отсутствует член с главным полюсом, а в разложениях главного полюса (I, III) отсутствуют характеристические полюсы.

Теперь докажем, что геометрия 2-го рода поверхности D_m совпадает с геометрией 1-го рода поверхности $\bar{X}$.

Обозначим метрический тензор поверхности $\bar{X}$ через $\gamma_{ij} = \bar{X}_i \bar{X}_j$ и учитывая, что точки $\bar{X}_i$, $\bar{X}$, $\underset{s}{\bar{X}}$ независимы между собой, напишем разложения

$$\nabla_j \bar{X}_{[i]} = C_{ij} \bar{X} + \overset{s}{b}_{ij} \underset{s}{\bar{X}}, \qquad \nabla_j \underset{s}{\bar{X}} = \underset{s}{C}{}_j^k \bar{X}_k + \underset{s}{\overset{t}{C}}{}_j \underset{t}{\bar{X}},$$

где $[i]$ — означает ковариантное дифференцирование по связности, определяемой основным тензором γ_{ij}.

Дифференцируя соотношение $h_{ij} = -\partial_i \bar{x} \partial_j \bar{X}$ смешанным образом по отношению к связности исходной поверхности и связности поверхности $\bar{X}$, мы получим

$$\nabla_k h_{i[j]} = 0.$$

Таким образом, получаем, что внутренняя геометрия исходной поверхности D_m сопряжена с внутренней геометрией поверхности $\bar{X}$ относительно главного фундаментального тензора h_{ij}. Из ([2]) известно, что внутренние связности 1 и 2-го рода двойственно нормализованной поверхности сопряжены относительно главного фундаментального тензора h_{ij}.

Отсюда вытекает, что геометрия 2-го рода исходной D_m в K_n совпадает с геометрией 1-го рода поверхности $\bar{X}$.

Теперь покажем, что любая поверхность X_m, расположенная на гиперсфере пространства K_n будет поверхностью D_m.

Действительно, выбирая за главную плоскость гиперполосы ту касательную к X_m, которая касается гиперсферы, мы получаем характеристику, ортогональную касательной плоскости T_m к X_m. Таким образом, мы имеем $d\bar{X}\underset{s}{\bar{X}} = h\bar{x}\underset{s}{\bar{X}} = 0$, то есть нормализация двойственная.

2. Рассмотрим случай, когда $m = n - 2$. Тогда (1) принимает следующий вид:

$$\nabla_j \bar{x}_i = -\varepsilon g_{ij}\bar{x} + h_{ij}\bar{X} + K_{ij}\bar{Y}, \quad \bar{X}_j = -\varepsilon_1 h_j^e \bar{x}_e, \quad \bar{Y}_j = -\varepsilon_2 K_j^e \bar{x}_e, \tag{2}$$

где

$$h_{ij} = -\partial_i \bar{x}\partial_j \bar{X} = \bar{x}\nabla_j \bar{x}_i, \quad K_{ij} = -\partial_i \bar{x}\partial_j \bar{Y} = \bar{Y}\,\bar{Y}_j \bar{x}_i.$$

Предположим, что $h = \mathrm{Det}\,\| h_{ij} \| \neq 0$ и $k = \mathrm{Det}\,\| K_{ij} \| \neq 0$. Из системы (2) можно определить векторные функции $\bar{x}$, $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, если задан метрический тензор g_{ij}, поверхности и тензоры h_{ij}, K_{ij}.

Задание этих величин не может быть произвольным, а должны выполняться условия интегрируемости основных уравнений (2), которые принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{I}\ \ R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot e} = -2\varepsilon g_{i[j}\delta_{k]}^e + 2\varepsilon_1 h_{i[j}h_{k]}^e + 2\varepsilon_2 K_{i[j}K_{k]}^e, \\ &\mathrm{II}\ \ \nabla_{[k}h_{j]i} = 0, \ \ \mathrm{III}\ \ \nabla_{[k}K_{j]i} = 0, \ \ \mathrm{IV}\ \ h_{[i}^m K_{j]m} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot e}$ есть тензор кривизны внутренней геометрии D_{n-2}.

Теорема 1. *Поверхность D_{n-2} определяется с точностью до движений пространства K_n, заданием своей внутренней римановой связности, а также тензорами h_{ij}, K_{ij}, удовлетворяющими условиям* (3).

Условия (2) симметричны относительно $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, откуда следует, что семейство гиперплоскостей $\bar{X}$, ортогональных вектору $\bar{Y}$, определяет гиперполосу $\{\bar{x}, \bar{X}\}$, которая тоже находится в двойственной нормализации. Больше того, такую же нормализацию мы получим, рассмотрев гиперполосу $\{\bar{x}, \bar{Z}\}$, где $\bar{Z} = c_1\bar{X} + c_2\bar{Y}$, причем c_1, c_2 постоянные.

Таким образом, если поверхность D_{n-2} в K_n допускает двойственную нормализацию, то она допускает ∞^1 таких нормализаций.

3. Все сказанное остается в силе для поверхности D_2, погруженной в пространство K_4. В этом случае условия (3.IV) показывают, что главные направления тензоров h_{ij}, K_{ij} совпадают.

Действительно, (3.IV) можно записать в следующем виде:

$$h_i^e K_{ej}\varepsilon^{ij} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha h_{ij} + \beta K_{ij} + \gamma g_{ij} = 0,$$

а это показывает, что главные направления тензоров h_{ij}, K_{ij} совпадают.

Таким образом, сети $h_{ij}du^i du^j = 0$, $K_{ij}du^i du^j = 0$ имеют общую биссекторную сеть (3). Тогда их биссекторные направления порождают на поверхности ортогональную сеть, аполярную нулевыми линиями тензоров h_{ij}, K_{ij}.

Сеть, аполярная тензором h_{ij}, K_{ij}, называется *сопряженной се-*

тью. Таким образом, мы видим, что на поверхности D_2, вложенной в K_4, существует ортогональная сопряженная сеть.

Теперь докажем, что если на поверхности X_2, вложенной в K_4, существует ортогональная сопряженная сеть, то поверхность допускает полярно-двойственную нормализацию.

Это утверждение докажем сначала в эллиптическом пространстве. Прежде всего заметим, что из существования сопряженной ортогональной сети вытекает совпадение главных направлений тензоров h_{ij} и K_{ij}, так что справедливо равенство

$$h^e_{[i}K_{j]e} = 0. \tag{4}$$

Запишем теперь деривационные уравнения поверхности, нормализованной некоторыми взаимно перпендикулярными ортами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$,

$$\nabla_j \bar{x}_i = -g_{ij}\bar{x} + h_{ij}\bar{X} + K_{ij}\bar{Y}, \quad \bar{X}_j = -h^e_j \bar{x}_e + c_j \bar{Y}, \quad \bar{Y}_j = -K^e_j \bar{x}_e - c_j \bar{X}. \tag{5}$$

Из условий интегрируемости этих уравнений следует, что

$$h^e_{[i}K_{i]e} - \nabla_{[i} c_{j]} = 0,$$

а значит, в силу (4), $\nabla_{[i} c_{j]} = 0$, то есть c_i — градиент.

Выбирая новые нормальные орты

$$\bar{X}^* = \bar{X}\cos\varphi + \bar{Y}\sin\varphi, \quad \bar{Y}^* = -\bar{X}\sin\varphi + \bar{Y}\cos\varphi,$$

мы получим новые тензоры

$$\overset{*}{h}_{ij} = h_{ij}\cos\varphi + K_{ij}\sin\varphi, \quad \overset{*}{K}_{ij} = K_{ij}\cos\varphi - h_{ij}\sin\varphi, \quad \overset{*}{c}_j = c_j - \varphi_j.$$

Тензоры $\overset{*}{h}_{ij}$, $\overset{*}{K}_{ij}$, имеют те же главные направления, что и тензоры h_{ij}, K_{ij}, а вектор $\overset{*}{c}_j$ можно за счет выбора функции $\varphi(u^1, u^2)$ обратить в нуль. Но тогда для таких $\bar{X}^*$ и $\bar{Y}^*$ уравнения (5) примут вид

$$\nabla_j \bar{x}_i = -g_{ij}\bar{x} + \overset{*}{h}_{ij}\bar{X}^* + \overset{*}{K}_{ij}\bar{Y}^*, \quad \bar{X}^*_j = -\overset{*}{h}{}^e_j \bar{x}_e, \quad \bar{Y}^*_j = -\overset{*}{K}{}^e_j \bar{x}_e.$$

Отсюда следует, что $\bar{X}^*$ и $\bar{Y}^*$ осуществляют полярно двойственную нормализацию поверхности.

Доказательство этого утверждения пройдет и в точках с гиперболической угловой метрикой.

Таким образом, доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы поверхность X_2, вложенная в K_4, была поверхностью D_2, необходимо и достаточно, чтобы сопряженная сеть была ортогональной.*

В заключение выражаю благодарность А. П. Нордену, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՋՅԱՆ

D_m մակերևույթները K_n տարածությունում

Մենք կասենք, որ X_m մակերևույթը երկակի նորմալացված է պրոյեկտիվ P_n տարածությունում, եթե նա նորմալացված է Ա. Պ. Նորդենի (1) իմաստով և նրա առաջին սեռի նորմալը պարունակում է X_m շոշափող հիպերհարթությունների խարակտերիստիկը։

Այս հոդվածում մենք դիտարկում ենք X_m մակերևույթն ընկղմված հաստատուն կորություն ունեցող K_n տարածությունում։ Պահանջենք, որ մակերևույթի շոշափող հիպերհարթությունների խարակտերիստիկը ուղղահայաց լինի մակերևույթի շոշափող հարթությանն ամեն մի կետում և այդ մակերևույթը նշանակենք D_m։

Ապացուցված է հետևյալը՝

1. D_m-ի 2-րդ սեռի երկրաչափությունը K_n-ում համընկնում է $\bar{X}$ մակերևույթի առաջին սեռի երկրաչափության հետ։

2. Եթե m-չափանի մակերևույթը գտնվում է հիպերսֆերայի վրա, ապա նա պատկանում է D_m դասին։

3. D_{n-2} մակերևույթը որոշվում է իր ներքին աֆինի կապակցությունով և ասիմպտոտական ֆորմերի տենզորներով։

4. Որպեսզի X_2-ը ընկղմված K_4-ում լինի D_2, անհրաժեշտ է և բավարար է, որ համալուծ ցանցը լինի օրթոգոնալ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, ГИТЛ, 1950. [2] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. 28, № 4, 1959. [3] *А. П. Норден*, Теория поверхностей, 1956.