ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 2

МАТЕМАТИКА

В. Д. Головин

Об устойчивости базиса показательных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/X 1962)

Базис (x_k) гильбертова пространства H называется *базисом Рисса* ([1]), если ряд с общим членом $a_k x_k$, где a_k—числа, сходится в том и только в том случае, когда $(a_k) \in l^2$. Целью настоящей заметки является доказательство двух теорем о базисе Рисса для последовательности E_Λ показательных функций $e^{i\lambda_k t}$ $(k = 1, 2,\ldots)$, где λ_k—попарно различные комплексные числа. Первая из этих теорем связана с результатами заметки ([2]), вторая—является уточнением известной теоремы Палея и Винера ([3]).

1. Семейство точек $x_i (i \in I)$ топологического векторного пространства E над телом вещественных или комплексных чисел назовем *вполне свободным*, если в E существует такая окрестность нуля U, что при каждом $k \in I$ окрестность $x_k + U$ не пересекается с замкнутым векторным подпространством, порожденным теми x_i, у которых $i \neq k$. Пусть $L^2_\Lambda(-\sigma, \sigma)$—замкнутое векторное подпространство, порожденное последовательностью E_Λ в $L^2(-\sigma, \sigma)$. Через $\hat{\tau}_\Lambda$ (соотв. T_Λ) будем обозначать точную нижнюю грань тех $\sigma > 0$, при которых последовательность E_Λ вполне свободна в $L^2(-\sigma, \sigma)$ (соотв. является базисом Рисса в $L^2_\Lambda(-\sigma, \sigma)$). Если последовательность E_Λ не является вполне свободной в $L^2(-\sigma, \sigma)$ (соотв. базисом Рисса в $L^2_\Lambda(-\sigma, \sigma)$) ни при одном σ, мы будем говорить, что $\hat{\tau}_\Lambda = \infty$ (соотв. $T_\Lambda = \infty$). Последовательность $\Lambda = (\lambda_k)$ будем называть *совершенно правильной*, если 1) все числа λ_k $(k = 1, 2,\ldots)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant h$; 2) при некотором $\delta > 0$ и любых $k \neq j$ $|\lambda_k - \lambda_j| > \delta$. Имеет место следующая теорема ([2]).

Теорема 1. *Если последовательность Λ совершенно правильная, то $T_\Lambda = \hat{\tau}_\Lambda < \infty$. Если последовательность Λ не является совершенно правильной, то $T_\Lambda = \infty$.*

Ее доказательство использует следующий факт, который в заметке ([2]) сформулирован, но не доказан.

Теорема 2. *Если последовательности* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $M = (\mu_k)$ *обе совершенно правильные и* $\sup|\lambda_k - \lambda_j| < \infty$, *то* $\hat{\tau}_\Lambda = \hat{\tau}_M$.

Ниже мы приведем доказательство этого факта. Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Если последовательности* $\Lambda = (\lambda_k)$ *и* $M = (\mu_k)$ — *обе совершенно правильные и* $\sup|\lambda_k - \lambda_j| < \infty$, *то* $T_\Lambda = T_M$.

2. *Доказательство теоремы* 2. Не нарушая общности, можно предположить, что одно из чисел $\hat{\tau}$, например $\hat{\tau}_\Lambda$, конечно. Если $\overline{(\varphi_k(t)}$ — последовательность, ограниченная в $L^2(-\sigma, \sigma)$ $(\sigma > \hat{\tau}_\Lambda)$ и образующая с E_Λ биортогональную систему, то положим

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi_k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \Phi_k(\lambda - \lambda_k). \tag{1}$$

Целая функция $\Phi_k(\lambda)$ имеет конечную степень $\leqslant \sigma$ и представима в виде [4]

$$\Phi_k(\lambda) = e^{ia\lambda} \lim_{R\to\infty} \prod_{|\nu_i|<R} (1 - \lambda/\nu_i), \tag{2}$$

причем числа $\lambda_j - \lambda_k$ $(j \neq k)$ входят в последовательность (ν_i). Заменив в последнем произведении числа $\lambda_j - \lambda_k$ числами $\mu_j - \mu_k$, получим функцию $\Psi_k(\lambda)$, такую, что $\Psi_k(\mu_j - \mu_k) = \delta_{kj}$. Ясно, что $\Psi_k(\lambda)$ имеет конечную степень $\leqslant \sigma$; оценим отношение функций $\Phi_k(\lambda)$ и $\Psi_k(\lambda)$.

Все числа λ_k, μ_k лежат в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant h$. При $H > 2h$ положим $\lambda = x + iH$ $(-\infty < x < \infty)$. Сумму

$$\ln\left|\frac{\Phi_k(\lambda)}{\Psi_k(\lambda)}\right| = \sum_{i\neq k} \ln\left|\frac{1 - \lambda/\lambda_{ik}}{1 - \lambda/\mu_{ik}}\right|,$$

где $\lambda_{ik} = \lambda_i - \lambda_k$, $\mu_{ik} = \mu_i - \mu_k$, разобьем на две: S_1 и S_2, соответственно при $|\lambda_{ik}| > 2|x|$ и $|\lambda_{ik}| \leqslant 2|x|$. Если положим еще: $\theta_{ik} = \mu_{ik} - \lambda_{ik}$, то

$$\frac{1 - \lambda/\lambda_{ik}}{1 - \lambda/\mu_{ik}} = \left(1 + \frac{\theta_{ik}}{\lambda_{ik}}\right)\left(1 - \frac{\theta_{ik}}{\mu_{ik} - \lambda}\right).$$

Следовательно, при $|x| \to \infty$

$$S_1 = \sum_{|\lambda_{ik}| > 2|x|} \ln\left|1 - \frac{\lambda\theta_{ik}}{\lambda_{ik}(\mu_{ik} - \lambda)}\right| = O\left(\sum_{k > |x|} \frac{|x|}{k^2}\right) = O(1);$$

$$S_2 = \sum_{\substack{|\lambda_{ik}| \leqslant 2|x| \\ i\neq k}} \left(\ln\left|1 + \frac{\theta_{ik}}{\lambda_{ik}}\right| + \ln\left|1 - \frac{\theta_{ik}}{\mu_{ik} - \lambda}\right|\right) = O(\ln|x|)$$

равномерно по k. Поэтому при $|x| \to \infty$

$$A|x|^{-p} \leqslant \left|\frac{\Psi_k(x+iH)}{\Phi_k(x+iH)}\right| \leqslant B|x|^p, \tag{3}$$

где A, B, $p>0$ — постоянные, не зависящие от x и k. Считая число p целым, положим теперь

$$\Theta_k(\lambda) = \Psi_k(\lambda)\left(\frac{\sin\omega\lambda}{\omega\lambda}\right)^{p+1} \quad (0<\omega<\varepsilon/p, \quad \varepsilon>0).$$

Ясно, что это целые функции конечной степени $\leqslant \sigma+\varepsilon$ из класса $L^2(-\infty, \infty)$. По теореме Палея и Винера

$$\Theta_k(\lambda-\mu_k) = \int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} \theta_k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

где $\theta_k(t) \in L^2(-\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$. Так как $\Theta_k(\mu_j-\mu_k)=\delta_{kj}$, то последовательность $\overline{(\theta_k(t))}$ образует с E_M биортогональную систему в $L^2(-\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$ и, кроме того,

$$\sup_k \int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} |\theta_k(t)|^2\,dt \leqslant M \sup_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Theta_k(x+iH-\mu_k|^2\,dx < \infty, \tag{4}$$

т. е. последовательность E_M вполне свободна в $L^2(-\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$, откуда $\hat{\tau}_M \leqslant \hat{\tau}_\Lambda$; аналогично $\hat{\tau}_\Lambda \leqslant \hat{\tau}_M$.

3. Пусть $\lambda_k\,(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$|\lambda_k - k| \leqslant D \quad (k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots). \tag{5}$$

Палей и Винер доказали [3], что при $D=\frac{1}{\pi^2}\approx 0{,}10$ всякая последовательность $(e^{i\lambda_k t})$ с показателями λ_k, удовлетворяющими указанным выше условиям, является базисом Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$. Даффин и Икес [7] усилили этот результат, доказав его справедливость при $D=\ln 2/\pi\approx 0{,}22$. Левинсон [6] показал, что при $D=0{,}25$ теорема Палея—Винера, вообще говоря, не имеет места, так как последовательность $(e^{i\lambda_k t})$ может не быть даже топологически свободной.

Теорема 4. *Если вещественные числа $\lambda_k\,(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ удовлетворяют условиям (5) при $D=0{,}24$, то последовательность $(e^{i\lambda_k t})$ является базисом Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$.*

Доказательство. По теореме Палея и Винера [3] достаточно доказать, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Sigma c_k(e^{i\lambda_k t}-e^{ikt})|^2\,dt \leqslant \theta\Sigma|c_k|^2 \tag{6}$$

для любой конечной последовательности комплексных чисел c_k и некоторого $\theta \in (0, 1)$. Заметим сначала, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Sigma c_k (e^{i\lambda_k t} - e^{ikt})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Sigma c_k (e^{i\lambda_k t} - e^{ikt})\, dt \right|^2, \tag{7}$$

где верхняя грань берется по всем функциям $f(t)$ из единичного шара пространства $L^2(-\pi, \pi)$, т. е. таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant 1.$$

Положив

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

перепишем интеграл в правой части равенства (7) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Sigma c_k (e^{i\lambda_k t} - e^{ikt})\, dt = \Sigma c_k \{F(\lambda_k) - F(k)\}.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$F(\lambda_k) - F(k) = \int_k^{\lambda_k} F'(u)\, du$$

и интерполяционной формулой

$$F'(u) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{F(u + n - 1/2)}{(\pi/2 - n\pi)^2}.$$

Тогда

$$S \equiv \Sigma c_k \{F(\lambda_k) - F(k)\} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\pi/2 - n\pi)^2} \sum_k c_k \int_k^{\lambda_k} F(u + n - 1/2)\, du, \tag{8}$$

причем абсолютная величина правой части не превосходит

$$\pi \sup_{-\infty < n < \infty} \left| \sum_k c_k \int_k^{\lambda_k} F(u + n - 1/2)\, du \right|.$$

Следовательно, в силу неравенства Коши,

$$|S| \leqslant \pi \left\{ \sum |c_k|^2 \cdot \sup_{-\infty < n < \infty} \sum_k \left| \int_k^{\lambda_k} F(u + n - 1/2)\, du \right|^2 \right\}^{1/2}.$$

Так как

$$\left|\int\limits_{k}^{\lambda_k} F(u+n-{}^1/_2)\,du\right|^2 < D\int\limits_0^{|\lambda_k-k|} |F(k\pm u+n-{}^1/_2)|^2\,du,$$

где знак при u зависит от знака величины $\lambda_k - k$, то

$$|S|^2 < \pi^2 D\sum|c_k|^2\cdot\sup_{-\infty<n<\infty}\sum_k\int\limits_0^{|\lambda_k-k|}|F(k\pm u+n-{}^1/_2)|^2\,du <$$

$$< \pi^2 D\sum|c_k|^2\cdot\sup_{-\infty<x<\infty}\int\limits_0^D\sum_k|F(k\pm u+x)|^2\,du. \qquad (9)$$

Поскольку

$$F^2(k\pm u+x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ut e^{it(k+x)}dt\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ut\, e^{it(k+x)}dt\right)^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ut e^{it(k+x)}\,dt\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ut e^{it(k+x)}\,dt,$$

то

$$\sum|F(k\pm u+x)|^2<\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)\cos ut|^2\,dt+\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)\sin ut|^2\,dt+$$

$$+2\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)\cos ut|^2\,dt\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)\sin ut|^2\,dt\right)^{1/2},$$

причем правая часть не превосходит величины $1+2\sin\pi u$. Следовательно, на основании (7)—(9),

$$\theta=\pi^2 D\sup_{-\infty<x<\infty}\int\limits_0^D\sum_k|F(k\pm u+x|^2\,du\leqslant\pi^2 D\int\limits_0^D(1+2\sin\pi u)\,du.$$

Правая часть равна $\pi^2D^2+2\pi D(1-\cos\pi D)$, что меньше, чем

$$\pi^2D^2+2\pi D\frac{(\pi D)^2}{2}=(\pi D)^2(1+\pi D)<1,$$

если $D\pi=0{,}754$, т. е. $D>0{,}24$.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Վ. Դ. ԳՈԼՈՎԻՆ

Ցուցչային ֆունկցիաների բազիսի կայունության մասին

Աշխատանքում ապացուցված են երկու թեորեմներ ցուցչային ֆունկցիաների հաջորդականության համար Ռիսսի բազիսի մասին (1)։ Այդ թեորեմներից առաջինը կապված է հեղինակի (2) աշխատանքի արդյունքների հետ, երկրորդը հանդիսանում է Պալեյի և Վիների հայտնի թեորեմի (3) ճշգրտումը։

Դիցուք λ_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2;\dots)$*-իրական թվեր են*

$$|\lambda_k - k| \leqslant D \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2,\dots) \qquad (1)$$

պայմաններին բավարարող։ Պալեյը և Վիները (3) ապացուցել են, որ $D = \frac{1}{\pi^2} \approx 0{,}10$ *դեպքում (1) պայմաններին բավարարող* λ_k *ցուցիչներով ամեն մի հաջորդականություն* $(e^{i\lambda_k t})$ *հանդիսանում է Ռիսսի բազիս* $L^2(-\pi, \pi)$*-ում։ Դաֆֆինը և Իկեսը (5) ուժեղացրել են այդ արդյունքը, ապացուցելով նրա ճշմարտացիությունը* $D = \frac{\ln 2}{\pi} \approx 0{,}22$ *դեպքում։*

Ներկա աշխատանքում ապացուցված է (թեորեմ 4), որ (1)-ին բավարարող λ_k *թվերի հաջորդականության համար,* $D = 0{,}24$ *դեպքում* $e^{i\lambda_k t}$ *ֆունկցիաների հաջորդականությունը հանդիսանում է Ռիսսի բազիս* $L^2(-\pi, \pi)$*-ում։ Հարկ է նշել, որ ինչպես ցույց է տվել Լևինսոնը (6)* $D = 0{,}25$ *դեպքում Պալեյի և Վիների թեորեմը, ընդհանրապես ասած, տեղի չունի, քանի որ* $(e^{i\lambda_k t})$ *հաջորդականությունը կարող է չլինել նույնիսկ տոպոլոգորեն ազատ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Бари*, Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, вып. 148, т. 4 (1951), 69—107. [2] *В. Д. Головин*, ДАН СССР, т. 14[illegible], № 1 (1962), 27—30. [3] *R. E. A. C. Paley* and *N. Wiener*, Fourier, Transforms in the Complex Domain, N. J., 1934. [4] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, М., 1956. [5] *Р. И. Даффин* и *И. Икесс*, Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), 850—85[illegible]. [6] *N. Levinson*, Crap and density theorems, N. J., 1940.