ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVI 1963 1

МАТЕМАТИКА

Е. Т. Ивлев и М. Б. Пергаменщиков

Об одном проективном классе пар комплексов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/X 1962)

В статье рассматриваются некоторые пары комплексов, характеризующиеся наличием расслояемых пар соответствующих линейчатых поверхностей.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве пару комплексов, описываемых соответствующими лучами A_1A_2 и A_3A_4. K-флекнодальными точками называются точки пересечения лучей A_1A_2 и A_3A_4 с директрисами линейной конгруэнции L, принадлежащей одновременно двум линейным комплексам, каждый из которых касается [1] одного комплекса пары и проходит через соответствующий луч другого комплекса этой пары. Плоскости, соответствующие в главной корреляции [1,2]* k-флекнодальным точкам луча одного комплекса, пересекают соответствующий луч другого комплекса в k-флекнодальных же точках. K-флекнодальные точки лучей пары не определены тогда и только тогда, когда рассматриваемая пара комплексов является парой T [3,4]. Поместив вершины проективного репера в k-флекнодальные точки лучей пары и произведя инвариантное нормирование, получим деривационные формулы:

$$dA_i = \omega_i^k A_k = (a_i^k \omega_1^3 + b_i^k \omega_2^4 + c_i^k \omega_3^1) A_k, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

где

$$a_1^3 = b_2^4 = c_3^1 = 1, \quad b_1^3 = c_1^3 = a_2^4 = c_2^4 = a_3^1 = b_3^1 = 0,$$

$$a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + a_4^4 = b_1^1 + b_2^2 + b_3^3 + b_4^4 = c_1^1 + c_2^2 + c_3^3 + c_4^4 = 0, \tag{2}$$

$$c_2^3 = c_3^2 = c_4^2 = 1, \quad a_1^4 = c_1^4 a_2^3, \quad b_1^4 = c_1^4 b_2^3, \quad a_4^1 = c_4^1 a_3^2, \quad b_4^1 = c_4^1 b_3^2,$$

$$c_1^4 c_4^1 (1 - c_1^4 c_4^1) \neq 0.$$

---

* Главная корреляция луча линейчатого комплекса: точке луча этого комплекса соответствует касательная плоскость любого торса этого комплекса с ребром возврата, описываемым этой точкой.

При построении репера из рассмотрения исключаются: а) пары T комплексов, а следовательно, расслояемые пары комплексов всех типов ([3]); б) пара комплексов с параболической конгруэнцией L; в) пара комплексов, содержащая по крайней мере один специальный комплекс; г) пары комплексов, у которых на каждом луче одного из комплексов по крайней мере одна из k-флекнодальных точек является квазифлекнодальной точкой ([5])* одновременно всех соответствующих пар линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре комплексов. Внешнее дифференцирование формул ([1]) репера приводит к системе 12 независимых внешних квадратичных уравнений, содержащей 27 неизвестных функций и определяющей пару комплексов с произволом в пять функций трех аргументов. В дальнейшем любую пару соответствующих линейчатых поверхностей, принадлежащую данной паре комплексов и заданную отношением главных форм $\omega_1^3 : \omega_2^4 : \omega_3^1$, будем называть комплексовой парой. Если $M = A_1 + tA_2$ и $N = A_3 + \tau A_4$ суть квазифлекнодальные точки соответствующих лучей произвольной комплексовой пары линейчатых поверхностей, то t и τ суть корни следующих квадратных уравнений:

$$
\begin{gathered}
(\omega_3^1\omega_2^3 + \omega_4^1\omega_2^4)\, t^2 + (\omega_1^3\omega_3^1 + \omega_4^1\omega_1^4 - \omega_2^4\omega_4^2 - \omega_2^3\omega_3^2)\, t - (\omega_3^2\omega_1^3 + \omega_4^2\omega_1^4) = 0, \\
(\omega_1^3\omega_4^1 + \omega_2^3\omega_4^2)\, \tau^2 + (\omega_1^3\omega_3^1 + \omega_2^3\omega_3^2 - \omega_2^4\omega_4^2 - \omega_1^4\omega_4^1)\, \tau - (\omega_3^2\omega_2^4 + \omega_1^4\omega_3^1) = 0.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Если M и N суть точки прикосновения ([6]) этих линейчатых поверхностей, то t и τ суть корни следующих квадратных уравнений:

$$
\omega_2^4 t^2 + 2\omega_1^4 t + c_1^4\omega_1^3 = 0, \quad c_4^1\omega_4^2\tau^2 + 2\omega_4^1\tau + \omega_3^1 = 0. \tag{4}
$$

Комплексовую пару линейчатых поверхностей $\omega_2^3 = 0$, $\omega_3^2 = 0$ назовем основной парой. Из (1) — (4) следует, что она характеризуется каждым из следующих свойств: 1) точки прикосновения лучей A_1A_2 и A_3A_4 гармонически делят соответствующие вершины репера; 2) вершины репера A_i являются квазифлекнодальными точками лучей A_1A_2 и A_3A_4. Пары соответствующих неголономных конгруэнций ([2]) $\omega_2^3 = 0$ и $\omega_3^2 = 0$ назовем базисными парами. Геометрически они характеризуются каждым из следующих свойств: 1) фокусы неголономной конгруэнции на одном из лучей пары совпадают с соответствующими вершинами репера; 2) фокальные плоскости в этих фокусах пересекают другой луч в k-флекнодальных точках.

2. С. Е. Карапетян ([7,8]) назвал парой A такую пару конгруэнций, в которой имеется по крайней мере одна расслояемая пара соответствующих линейчатых поверхностей. Пару комплексов, характеризующуюся наличием по крайней мере одной расслояемой пары соответ-

* Квазифлекнодальными точками соответствующих лучей пары линейчатых поверхностей называются точки пересечения этих лучей с директрисами линейной конгруэнции, общей пучку общих касательных линейных комплексов рассматриваемой пары линейчатых поверхностей.

ствующих линейчатых поверхностей, будем также называть „парой A“. Она определяется натуральным уравнением

$$(a+b)c+a(ab_4^2-a_4^2b)=0,$$

где

$$a=a_2^3-a_3^2,\quad b=b_2^3-b_3^2,\quad c=b_2^3a_3^2-a_2^3b_3^2.$$

Основная пара линейчатых поверхностей пары A комплексов является расслояемой парой. Прямая Розенфельда ([12], [34]) ([3]) в P_5 описывает трехпараметрическое семейство прямых, распадающееся единственным способом на фокальные подсемейства.

3. Парой A_0 комплексов называется пара, определяемая натуральными уравнениями:

$$a_2^3=a_3^2,\quad b_2^3=b_3^2.$$

Пары A_0 образуют подкласс пар A комплексов. Пара A_0 характеризуется каждым из следующих свойств: а) базисные пары неголономных конгруэнций совпадают; б) вершины репера A_i являются фокусами соответствующих лучей базисной пары неголономных конгруэнций; в) базисная пара неголономных конгруэнций образует пару T (пара T неголономных конгруэнций определяется так же, как и пара T голономных конгруэнций ([3]); г) существуют по крайней мере две расслояемые комплексовые пары линейчатых поверхностей

$$\omega_2^3=0,\quad a_2^3(\omega_1^3)^2+(b_2^3-a_2^3+a_4^2)\,\omega_1^4\omega_2^4+(b_4^2-b_2^3)(\omega_2^4)^2=0; \tag{5}$$

д) вершины репера A_i являются квазифлекнодальными точками лучей произвольной пары соответствующих линейчатых поверхностей базисной пары неголономных конгруэнций; е) прямая Розенфельда ([12], [34]) в P_5 описывает трехпараметрическое семейство прямых, двумя способами распадающееся на фокальные подсемейства.

4. Парой A_2 комплексов называется пара, определяемая натуральными уравнениями:

$$a_2^3=a_3^2,\quad b_2^3=b_3^2,\quad a_4^2=a_2^3+b_2^3.$$

Эта пара характеризуется каждым из следующих свойств: а) базисная пара неголономных конгруэнций расслояема в обе стороны (расслояемая в одну или обе стороны пара неголономных конгруэнций определяется так же, как и расслояемая пара голономных конгруэнций ([3])); б) пары линейчатых поверхностей (5), принадлежащие базисной паре неголономных конгруэнций, гармонически делят, т. е. высекают на всех неголономных поверхностях (A_i) линии, касательные к которым образуют гармоническую четверку, соответствующие пары линейчатых поверхностей той же пары конгруэнций, сопряженные как в одной, так и в другой неголономных конгруэнциях базисной пары (сопряженные линейчатые поверхности неголономной конгруэнции определяются так же, как сопряженные в смысле Санниа линейчатые поверхности голономной конгруэнции ([9]). Пары линейчатых поверхностей (5) базисной пары неголономных конгруэнций пары A_1 комплексов соответствуют асимптотическим линиям на расслояющих поверхностях обоих семейств. Пары A_1 комплексов образуют подкласс класса A_0 комплексов.

5. Пару конгруэнций, все соответствующие линейчатые поверхности которых расслояемы, назовем парой P.

Пары P конгруэнций существуют и определяются с произволом в две функции двух аргументов ([3]). Эти пары обладают следующими свойствами (точки B_1, B_2, B_3, B_4—фокусы соответствующих лучей конгруэнций пары): 1) торсы соответствуют накрест ([3]); 2) конгруэнции пары проективно наложимы ([10]): 3) конгруэнции $\{B_1+\lambda B_2,\ B_3+\mu B_4\}$, где λ и μ—произвольные функции главных параметров, принадлежат общему линейному комплексу. Следующие свойства пар P являются характеристическими: 1) конгруэнции $\{B_1B_2\}$ и $\{B_3B_4\}$ образуют пару T Финикова ([3]), а расслояемые линейчатые поверхности этой пары сопряжены в смысле Санниа ([9]) в одной из конгруэнций $\{B_1B_2\}$ или $\{B_3B_4\}$; 2) конгруэнции $\{B_1B_2\}$ и $\{B_3B_4\}$ образуют пару T Финикова, а конгруэнции $\{B_1B_3\}$ и $\{B_2B_4\}$ принадлежат общему линейному комплексу; 3) конгруэнции $\{B_1+\lambda_i B_2,\ B_3+\mu_i B_4\}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, где λ_i, μ_i—произвольные функции главных параметров, причем

$$det\, \| \alpha_i^k \| \neq 0,\ (\alpha_i^1=1,\ \alpha_i^2=\lambda_i,\ \alpha_i^3=\mu_i,\ \alpha_i^4=\lambda_i\mu_i),$$

имеют общий касательный линейный комплекс, не содержащий прямых B_1B_2 и B_3B_4. Парой A_2 комплексов называется пара, определяемая натуральными уравнениями:

$$a_2^3=a_3^2=a_4^2+b_4^2=0,\quad b_2^3=b_3^2=b_4^2.$$

Эта пара характеризуется тем, что базисная пара неголономных конгруэнций образует пару P голономных конгруэнций. Пары A_2 комплексов образуют подкласс класса пар A_0 комплексов.

6. Обычным путем находим, что пары A, A_0, A_1 и A_2 комплексов существуют и определяются с производом, соответственно в 4, 2, 1 функций трех аргументов и 7 функций двух аргументов.

Ե. Տ. ԻՎԼԵՎ ԵՎ Մ. Բ. ՊԵՐԳԱՄԵՆՇԻԿՈՎ

Կոմպլեքսների զույգի մի պրոեկտիվ դասի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է կոմպլեքսների մի զույգ, որը ստացվում է կոնգրուենցիաների A զույգի գաղափարը կոմպլեքսների զույգի համար ընդհանրացնելու ժամանակ [7]։ Այդ զույգը ևս անվանվում է A զույգ։

Ստացվում են նաև բազմաթիվ ենթադասեր, որոնք լրիվ հետազոտված են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *V. Hlavaty*. Differentialni primkova geometrie, Praze, 1941. [2] *Р. Н. Щербаков*. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Томск, 1960, 82—83. [3] *С. П. Фиников*. Теория пар конгруэнций, М., 1956. [4] *М. А. Акивис*, ДАН, 61, 181—184 (1948). [5] *Е. Т. Ивлев*. Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Томск, 1960. [6] *Н. И. Кованцов*, Украинский математический журнал, VIII, 2, 140—158, 1956. [7] *С. Е. Карапетян*, Изв. АН Армянской ССР, XII, 4, 27—33 (1953). [8] *С. Е. Карапетян*, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Томск, 1960. [9] *Р. Н. Щербаков*. ДАН, 112, 2, 390—393 (1957). [10] *С. П. Фиников*, Теория конгруэнций, М.—Л., 1950.