ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVI 1963 1

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

Теоремы единственности для некоторых классов функций, мероморфных в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/X 1962)

1°. Обозначим через L произвольную открытую дугу Жордана, которая соединяет начальную точку $z=0$ с границей окружности $|z|=1$ и на которой $|z|$ не убывает. Любая связная часть L, примыкающая к $z=0$, предполагается спрямляемой. Возьмем на дуге L произвольную, измеримую вдоль L, совокупность точек E. Пусть $E(r)$—часть этой совокупности, принадлежащая кругу $|z|\leqslant r$.

Обозначим через $\omega(|t|)$ произвольную ограниченную $(\omega(|t|)\leqslant 1)$ неотрицательную функцию, определенную для точек $t\in E$ и

$$\int_E \frac{\omega(|t|)}{1-|t|}\,d|t|<\infty. \tag{1.1}$$

Пусть, далее, функция $w(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ и $T(r)$—ее характеристика.

В работе А. Л. Шагиняна (1) была установлена следующая общая теорема.

Если при некотором θ $(0<\theta<1)$

$$\varliminf_{r\to 1}\left\{\int_{E(r)} \omega(|t|)\lg|w(t)|\,d|t|/T(r+\theta(1-r))\right\}=-\infty, \tag{1.2}$$

то $w(z)\equiv 0$.

Доказано также, что этот результат точный в классе всевозможных мероморфных функций.

В настоящей заметке с помощью интегрального представления устанавливаются теоремы единственности для мероморфных функций, характеристика которых имеет произвольный, но не выше чем $(1-r)^{-1}$, порядок роста. Приводимые здесь предложения представляют собой дальнейшее обобщение результатов другой работы А. Л. Шагиняна (2) и автора (3).

2°. Введем, как в (4), следующие определения.

Определение 1. *Условимся говорить, что непрерывная на* $0 < t \leqslant 1$ *функция* $H(t) \geqslant 0$ *принадлежит классу* C_H, *если* $H(0)=\infty$, $tH(t) \downarrow 0$ *при* $t \to 0$ *и*

$$\int_0 \frac{dt}{tH(t)} < \infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(u)\,du = c, \quad \text{где} \quad c \neq 0, \infty.$$

Для функции $w(z)$, мероморфной в $|z|<1$, через $A(r)$ обозначают выражение

$$A(r) = \iint\limits_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\,dxdy, \quad z = x+iy.$$

Известно, что

$$T(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt.$$

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $w(z)$ *принадлежит классу* T_H, *где* $H \in C_H$, *если*

$$T_H(w) \equiv \int_0^1 A(t)\,H(1-t)\,dt < \infty \quad \text{при} \quad \int_0^1 H(1-u)\,du < \infty$$

и

$$T_1(w) \equiv \lim_{r\to 1-0} A(r) < \infty \qquad \text{при} \quad \int_0^1 H(1-u)\,du = \infty.$$

В работе ([5]) М. М. Джрбашяном рассмотрены классы функций $w(z)$, мероморфных в $|z|<1$, характеристическая функция которых удовлетворяет условию

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha\, T(r)\,dr < \infty \qquad (\alpha > -1),$$

и установлены их интегральные представления.

Заменяя функцию $(1-r)^\alpha$ функцией $H(1-r)$ и используя метод М. М. Джрбашяна, примененный в ([5]) для функций класса T_n, получим следующее интегральное представление*:

$$w(z) = \frac{k_h}{\overline{C}_\lambda} z^\lambda \frac{\pi_h(z, a_\mu)}{\pi_h(z, b_\mu)} \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \lg|w(\zeta)|\,G(z\bar{\zeta})\,h(1-\rho)\,d\rho\,d\theta\right]. \tag{2.1}$$

Здесь $C_\lambda \neq 0$ — старший коэффициент ряда Лорана функции $w(z)$ в нулевой точке,

---

* См. также ([6]).

$$k_h = \exp\left[\frac{2\lambda}{a_0}\int_0^1 h(1-\rho)\lg\frac{1}{\rho}\,d\rho\right],$$

a_ν — нули, b_ν — полюсы функции $w(z)$, пронумерованные в порядке неубывания их модулей, а $h(\rho) = \int_0^\rho H(u)\,du$. Функция $G(z)$ голоморфна в $|z| < 1$, имеет следующий вид:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \int_0^1 H(1-r)\,r^{2n}dr.$$

В (2.1) через $\pi_h(z, a_\mu)$ обозначено следующее произведение

$$\pi_h(z, a_\mu) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\mu}\right)e^{-U_h(z, a_\mu)}, \quad 0 < |a_0| \leqslant |a_1| \leqslant \cdots, \tag{2.2}$$

где

$$U_h(z, a_\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \lg\left|1 - \frac{\zeta}{a_\mu}\right| G(z\bar{\zeta})\, h'(1-\rho)\,d\rho\,d\theta. \tag{2.3}$$

Если $\{a_\mu\}_1^\infty$ — бесконечная последовательность комплексных чисел из $|z| < 1$, отличных от нуля, упорядоченных в порядке неубывания их модулей, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$ и

$$\sum_1^{\infty} h(1-|a_n|)\,(1-|a_n|) < \infty,$$

то бесконечное произведение $\pi_h(z, a_\mu)$ абсолютно и равномерно сходится внутри $|z| < 1$ и представляет голоморфную в $|z| < 1$ функцию, обращающуюся в нуль только в точках a_n $(n = 1, 2, \cdots)$.

3°. Оценку роста функции $G(\rho)$ при $\rho \to 1-0$ дает следующая лемма.

Лемма 1. *Для функции $G(\rho)$ справедливо неравенство*

$$G(\rho)\,h(1-\rho) < \frac{c}{1-\rho}, \tag{3.1}$$

где c постоянная.

Действительно, легко получить, что $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n} H\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ при $n \to \infty$, отсюда

$$G(\rho) < c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\rho^n}{H\left(\frac{1}{n}\right)} = c_1 \sum_1^{N} \frac{n\rho^n}{H\left(\frac{1}{n}\right)} + c_1 \sum_{N+1}^{\infty} \frac{n\rho^n}{H\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

В первой сумме пусть $n < \frac{1}{1-\rho}$ или $\frac{1}{n} > 1-\rho$, а во второй $\frac{1}{n} < 1-\rho$, тогда

$$G(\rho) < c_1' \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho^n}{h\left(\frac{1}{n}\right)} + c_1 \sum_{N+1}^{\infty} \frac{n\rho^n}{H\left(\frac{1}{n}\right)} \leqslant c_1' \frac{1}{(1-\rho)\,h(1-\rho)} +$$

$$+ c_1 \frac{1}{(1-\rho)^2 H(1-\rho)} < \frac{c}{(1-\rho)\,h(1-\rho)},$$

так как $H(1-\rho)(1-\rho) = O(h(1-\rho))$ при $\rho \to 1-0$. Лемма доказана.

Если через E^* обозначим проекцию E на радиус $0 \leqslant x < 1$ круговыми дугами, то при условии (1.1) будем иметь

$$\int\limits_{E^*} G(\rho)\, h(1-\rho)\, \omega(\rho)\, d\rho < \infty. \tag{3.2}$$

Пусть $\omega(|t|)$ удовлетворяет условию (1.1), тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Если $\pi_h(z, a_\mu)$ есть произведение, соответствующее некоторой функции $w(z) \in T_u$, то имеет место неравенство*

$$\int\limits_{E} \omega(|z|)\, h(1-|z|) \lg|\pi_h(z, a_\mu)|\, d|z| > -DT_u(w) - C,$$

где D и C определенные константы.

Для произвольного произведения $\pi_h(z, a_\mu)$ возможны случаи, когда

$$\int\limits_{E} h(1-|z|) \lg|\pi_h(z, a_\mu)|\, d|z| = -\infty.$$

Это следует из следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$, то для конечности*

$$J = \int\limits_0^1 h(1-x) \lg|\pi_h(x, a_n)|\, dx$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} h(1-a_k)(1-a_k) \lg \frac{1}{1-a_k} < \infty.$$

Легко видеть, что если интеграл J расходится, то он становится отрицательной бесконечностью. Это означает, что если числа $\{a_k\}$ выбраны так, что

$$\sum_{k=1} h(1-a_k)(1-a_k) < \infty,$$

однако

$$\sum_{k=1}^{\infty} h(1-a_k)(1-a_k) \lg \frac{1}{1-a_k} = +\infty,$$

то будем иметь

$$\int_0^1 h(1-x) \lg |\pi_h(x, a_n)| \, dx = -\infty,$$

где $\pi_h(x, a_n)$—сходящееся произведение (2.2).

Эти примеры показывают, что присутствие некоторого убывающего множителя типа $\omega(|t|)$ для неравенства вида

$$\int_E h(1-|z|)\, \omega(|z|) \lg |\pi_h(z, a_n)| \, d|z| > -\infty$$

необходимо.

4. Для функции $w(z)$ из класса $T_н$, используя представление (2.1), можно получить следующее неравенство:

$$|\pi_h(z, b_n) w(z)| <$$

$$< c_1 \exp\left\{ c_2 \int_E \omega(|z|)\, h(1-|z|) \lg |w(z)| \, d|z| + c_3 G(|z|) \right\}, \tag{4.1}$$

где c_i $(i = 1, 2, 3)$—определенные константы.

Если обозначить $\Omega(t) = \omega(t)\, h(1-t)$, то условие (1.1) запишется в виде:

$$\int_{E^*} \frac{\Omega(t)\, dt}{(1-t)\, h(1-t)} < \infty \tag{4.2}$$

и неравенство (4.1) примет следующий вид:

$$|\pi_h(z, b_n) w(z)| < c_1 \exp\left\{ c_2 \int_E \Omega(|z|) \lg |w(z)| \, d|z| + c_3 G(|z|) \right\} \tag{4.3}$$

Отсюда получается следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть функция* $w(z) \in T_н$. *Если* $\Omega(t)$ *удовлетворяет условию* (4.2), *то из равенства*

$$\int_E \Omega(|z|) \lg |w(z)| \, d|z| = -\infty \tag{4.4}$$

вытекает, что $w(z) \equiv 0$.

В заметке [3], подобно теоремам А. Л. Шагиняна [2], приведены и другие теоремы единственности для голоморфных функций в круге, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \lg^+|f(\rho e^{i\theta})|\rho d\rho d\theta<\infty \quad (\alpha>-1).$$

Аналогичные теоремы можно сформулировать и для функций класса T_u.

Эти результаты верны не только для класса T_u, но и для более широкого класса функций, характеристики которых удовлетворяют условию

$$\int_0^1 H(1-\rho)\,T(\rho)\,d\rho<\infty. \tag{4.5}$$

Но так как $H(1-\rho)(1-\rho)=O(h(1-\rho))$ при $\rho\to 1-0$, то этот класс совпадает с классом

$$\int_0^1 \frac{h(1-\rho)}{1-\rho}\,T(\rho)\,d\rho<\infty.$$

Значит, характеристики $T(\rho)$ для этого класса могут расти со скоростью $\frac{\omega^*(\rho)}{h(1-\rho)}$, где $\omega^*(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega^*(\rho)}{1-\rho}\,d\rho<\infty.$$

Из (1.2) для данного класса получится следующий результат. Если при некотором $\theta\ (0<\theta<1)$

$$\lim_{r\to 1-0}\left\{\int_{E(r)}\omega(|t|)\lg|w(t)|\,d|t|\cdot\frac{h[(1-r)(1-\theta)]}{\omega^*(r+\theta(1-r))}\right\}=-\infty, \tag{4.6}$$

то $w(t)\equiv 0$.

А из теоремы 2 получим, что из

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{E(r)}\omega(|t|)\,h(1-|t|)\lg|w(t)|\,d|t|=-\infty \tag{4.7}$$

будет вытекать, что $w(t)\equiv 0$.

В (4. 6) вынесено наименьшее значение функции $h(1-|t|)$ из-под знака интеграла, что для медленно растущих $\varphi^*(r)$ даст нам основание сказать, что результат (4.7) всегда нам даст ответ, если будет выполняться (4.6).

Автор признателен своему руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и за ценные советы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Միակության թեորեմներ շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի համար

Միավոր շրջանում մերոմորֆ $w(z)$ *ֆունկցիայի համար* $A(r)$*-ով նշանակում ենք հետևյալ մեծությունը*

$$A(r) = \iint\limits_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\, dxdy, \quad z = x+iy.$$

Կասենք $w(z) \in T_H$, *որտեղ* H *ֆունկցիան ընտրված է որոշակի դասից, եթե*

$$\int_0^1 A(r) H(1-r)\, dr < \infty, \quad \text{երբ} \quad \int_0^1 H(1-r)\, dr < \infty$$

և

$$\lim_{r\to 1-0} A(r) < \infty, \quad \text{երբ} \quad \int_0^1 H(1-r)\, dr = \infty.$$

Թող $h(\rho) = \int_0^\rho H(u)\, du$, *իսկ* $\Omega(t)$ *անընդհատ և չաճող ֆունկցիան բավարարի հետևյալ պայմանին*

$$\int_{E^*} \frac{\Omega(t)}{(1-t)\, h(1-t)}\, dt < \infty,$$

որտեղ E^* *կամայական բազմություն է* $[0,1)$*-ում: Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.*

Եթե $w(z) \in T_H$, *ապա*

$$\int_E \Omega(|z|) \lg|w(z)|\, d|z| = -\infty$$

հավասարությունից հետևում է, որ $w(z) \equiv 0$. E *բազմությունը ստացվում է* E^**-ից որոշակի ձևով:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Шагинян*, ДАН СССР, т. 129, № 2 (1959), 284—287. [2] *А. Л. Шагинян*, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 1 (1959), 3—25. [3] *В. С. Захарян*, ДАН АрмССР, XXXV, № 2 (1962), 49—53. [4] *В. С. Захарян*, ДАН АрмССР, т. XXXV, № 1 (1962), 3—11. [5] *М. М. Джрбашян*, К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения института математики и механики АН АрмССР, вып. 2, 3—55, 1948. [6] *К. М. Фишман*, ДАН СССР, т. 107, № 3 (1959), 366—369.