

ՏՈՒԳԱՆՔԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ԵՎ ՕՊՏԻՄԱԼՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ՌԱՖԻԿ

Երևանի պետական համալսարան

Էլ. հասցե՝ khrafik@ysu.am

ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ ՍԵՅՐԱՆ

Երևանի պետական համալսարան

Էլ. հասցե՝ seyran.stepanyan@ysu.am

DOI: 10.24234/scientific.v1i46.131

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկայացվող աշխատանքը նվիրված է կիրառական մաթեմատիկայի կարևորագույն ոլորտներից մեկի, այն է՝ մաթեմատիկական ծրագրավորմանը:

Դիտարկվում է մաթեմատիկական ծրագրավորման ընդհանուր հետևյալ խնդիրը՝

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad f_i(x) = 0, \quad i=(k+1), \dots, m, \quad x \in M \subset R^n,$$

որտեղ $f_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$ ֆունկցիաները լիպշիցյան են, իսկ M -ը փակ բազմություն է:

Աշխատանքի նպատակն է տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդով ստանալ օպտիմալության պայմաններ նշված խնդրի համար:

Արդյունքում ստացված անհրաժեշտ պայմանները արտահայտվում են սուբգրադիենտների լեզվով, որոնք Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդի ընդհանրացումներն են ոչ ողորկ օպտիմիզացիայի խնդիրների համար:

Բանալի բառեր՝ լիպշիցյան ֆունկցիաներ, ուռուցիկ ֆունկցիաներ, Կլարկի սուբգրադիենտ, Լագրանժի անորոշ գործակիցներ:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տուգանքային ֆունկցիայի մեթոդը ոչ գծային օպտիմալացման խնդիրների լուծման ամենապարզ և լայնորեն կիրառվող մեթոդներից է: Մեթոդի գաղափարը հիմնված է սկզբնական սահմանափակումներով խնդրի վերափոխման վրա մեկ կամ անսահմանափակ օպտիմալացման խնդիրների հաջորդականության: Այս վերափոխման էությունը հետևյալն է. սահմանափակում տվող գործառույթների օգնությամբ կառուցվում է

այսպես կոչված տուգանք, որն ավելացվում է սկզբնական խնդրի նպատակային ֆունկցիային, որպեսզի ցանկացած սահմանափակման խախտում դառնա անշահավետ՝ առաջացող ոչ պայմանական օպտիմալացման խնդրի տեսանկյունից:

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդը օգտակար և հզոր գործիք է պայմանական օպտիմալացիայի խնդիրներում օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանների ստացման մեջ: Իհարկե, այս մեթոդիկան հայտնի է վաղուց: Օրինակ (А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов и Федоров В.В., 1986) և (Федоров В.В., 1979) աշխատանքներում կիրառելով տուգանքների մեթոդը՝ հիմնավորվում է Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակը մաթեմատիկական ծրագրավորման ողորկ խնդիրներում:

Կիրառելով տուգանքային ֆունկցիաները՝ հավասարության և անհավասարության տիպի ոչ ողորկ սահմանափակումներով օպտիմիզացիայի խնդիրներում ապացուցվում է Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդը:

Հոդվածում օգտագործվում են ուռուցիկ անալիզում ընդունված հայտնի նշանակումները

ՄԵԹՈԴԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Նկարագրենք տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդը հավասարության և անհավասարության տիպի սահմանափակումներով պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրներում: Նախ բերենք հոդվածում օգտագործվող անհրաժեշտ սահմանումներ և գաղափարները:

Սահմանում 1: $P_k(x)$, $k=1,2,\dots$ ֆունկցիաները կոչվում են տուգանքային ֆունկցիաներ X բազմության համար, եթե

$$1) \quad P_k(x) \geq 0, \quad k=1,2,\dots, \quad x \in R^n,$$

$$2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \\ +\infty, & x \notin X \end{cases}$$

Սովորաբար, եթե X բազմությունը տրվում է $X = \{x \in R^n / f_i(x) \leq 0, i=1,2,\dots,l\}$

տեսքով, ապա $P_k(x)$ տուգանքային ֆունկցիաները վերցնում են հետևյալ կերպ՝

$$P_k(x) = k \sum_{i=1}^l [\max\{0, f_i(x)\}]^2, \quad (1)$$

որտեղ k -ն կոչվում է տուգանքի գործակից: Իսկ, եթե X բազմությունն ունի $X = \{x \in R^n / f_i(x) = 0, i=1,2,\dots,l\}$ տեսքը, ապա տուգանքները վերցնում են հետևյալ տեսքով

$$P_k(x) = k \sum_{i=1}^l [f_i(x)]^2: \quad (2)$$

Այժմ դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի ընդհանուր խնդիրը անհավասարության տիպի սահմանափակումների դեպքում.

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in Q \equiv \{x \in M / f_i(x) \leq 0, i=1,2,\dots,l\}: \quad (3)$$

Տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդի էությունն այս է. դիտարկվում է մինիմիզացիայի խնդիրների հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$F_k(x) \equiv f_0(x) + P_k(x) \rightarrow \min_{x \in M}, k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդի զուգամիտության վերաբերյալ (Сухарев А.Г., Тимохов А.В. и Федоров В.В., 1986, էջ 242).

Թեորեմ 1: Դիցուք

- 1) $M \subset R^n$ -ը կոմպակտ բազմություն է, իսկ $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l$ ֆունկցիաները անընդհատ են,
- 2) x_k -ն հանդիսանում է (4)-րդ խնդրի լուծումը k -րդ իտերացիայի ընթացքում:

Այդ դեպքում $\{x_k\}$ հաջորդականության կամայական սահմանային կետ հանդիսանում է (3)-րդ խնդրի լուծում:

Մեկնաբանենք այս թեորեմը պարզ օրինակի վրա:

Օրինակ:

$$f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, (x_1, x_2) \in M \equiv \{(x_1, x_2) \in R^2 / f_1(x_1, x_2) = x_1 + 1 \leq 0\}: \quad (5)$$

Որպես տուգանքային ֆունկցիա վերցնենք (1) տիպի ֆունկցիա՝ $P_k(x) = k[\max(0, x_1 + 1)]^2$ և

դիտարկենք (4) խնդիրների հաջորդականությունը՝ $F_k(x) = x_1^2 + x_2^2 + k[\max(0, x_1 + 1)]^2 \rightarrow \min$:

Այստեղից, եթե $x_1 < -1$, ապա $F_k(x) = x_1^2 + x_2^2$, հակառակ դեպքում

$F_k(x) = x_1^2 + x_2^2 + k[\max(0, x_1 + 1)]^2$: Այստեղից հետո հեշտ է նկատել, որ

$$\min_{x \in R^2} F_k(x) = \min_{x \in R^2} (x_1 + k[\max(0, x_1 + 1)]^2) = \frac{k}{k+1}, \quad x_k = \arg \min F_k(x) = \left(\frac{-k}{k+1}, 0 \right):$$

Հետևաբար, երբ $k \rightarrow +\infty$, ապա $x_k \rightarrow (-1, 0)$: Ակնհայտ է նաև, որ $(-1, 0)$ վեկտորը (5) խնդրի լուծումն է

ՔՆՆԱՐԿՈՒՄ

Տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդը ոչ միայն պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծման հզոր հաշվողական գործիք է, այլև ընդհանուր եղանակ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանների ստացման համար:

Ստորև նկարագրենք Կուն-Տակերի թեորեմի ապացույցը տուգանքների մեթոդով: Ապացույցը կատարվում է ոչդիֆերենցելի դեպքերի համար:

1. Կուն-Տակերի թեորեմի ապացույցը տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդով

Սահմանում 2: Դիցուք $f(x)$ -ը ուռոցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված R^n -ի վրա: v վեկտորը կոչվում է սուբգրադիենտ x^0 կետում, եթե տեղի ունի $f(x) - f(x^0) \geq (v, x - x^0)$, $\forall x \in R^n$

անհավասարությունը: $f(x)$ -ի սուբգրադիենտների բազմությունը x^0 կետում կոչվում է սուբգրադիենտների բազմությունը x^0 կետում կոչվում է $\partial f(x^0)$ սիմվոլով:

Նշենք սուբգրադիենտների որոշ հատկություններ, որոնք կօգտագործվեն հետագայում:

- $\partial f(x)$ -ը ոչ դատարկ, ուռուցիկ և կոմպակտ ենթաբազմություն է R^n տարածությունից:
- Դիցուք $f_1(x)$ -ը և $f_2(x)$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիաներ են՝ որոշված R^n -ի վրա: Այդ դեպքում $\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$:
- $\partial(\lambda f(x)) = \lambda \partial f(x)$, $\lambda \geq 0$:
- Եթե $f(x)$ -ը անընդհատ դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիա է, ապա $\partial f(x) = f'(x)$, որտեղ $f'(x)$ -ը ֆունկցիայի գրադիենտն է x կետում:
- $\partial([\max(0, f(x))]^2) = 2 \max[0, f(x)] \partial f(x)$:
- $x \rightarrow \partial f(x)$ բազմարժեք արտապատկերումը կիսաանընդհատ է վերևից:

Այսինքն՝ $\forall x_m \rightarrow x_0, y_m \in \partial f(x_m), y_m \rightarrow y_0 \Rightarrow y_0 \in \partial f(x_0)$:

Սուբգրադիենտների այս հատկությունների ապացույցը կարելի է գտնել ուռուցիկ անալիզի համարյա բոլոր գրքերում՝ մասնավորապես (Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. 1981) աշխատությունում:

Դիցուք M -ը փակ ուռուցիկ ենթաբազմություն է R^n -ից: Նշանակենք՝

$$K_M(x) = \{v \in R^n / v = \lambda(\bar{x} - x), \bar{x} \in M\}:$$

Այս բազմությունը կոչվում է թույլատրելի ուղղությունների կոն M բազմության համար x կետում: Իսկ $K_M^*(x) = \{w \in R^n / (w, v) \geq 0, \forall v \in K_M(x)\}$ բազմությունը կոչվում է $K_M(x)$ -ի համալուծ կոն: Հայտնի է, որ $x \rightarrow K_M^*(x)$ բազմարժեք արտապատկերումը կիսաանընդհատ է վերևից (Федоров В.В., 1979):

Տեղի ունի մինիմումի հետևյալ ընդհանուր անհրաժեշտ պայմանը (Пшеничный Б.Н., էջ 142):

Թեորեմ 2: Դիցուք x^* -ը հանդիսանում է f ուռուցիկ ֆունկցիայի մինիմումի կետ M ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում

$$0 \in \partial f(x^*) - K_M(x^*): \quad (6)$$

Այժմ դիտարկենք անհավասարությունների տիպի սահմանափակումներով (3)-րդ խնդիրը:

Թեորեմ 3: Դիցուք x^* -ը (3)-րդ խնդրի լուծումն է, որտեղ

1) $f_i(x)$, $i=1,2,...,l$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են R^n -ի վրա:

2) M -ը փակ ուռուցիկ ենթաբազմություն է R^n -ից:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_l \geq 0$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, որ

$$\text{ա) } 0 \in \sum_{i=0}^l \lambda_i \partial f_i(x^*) - K_M^*(x^*),$$

$$\text{բ) } \lambda_i f_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, l:$$

Ապացույց: Դիտարկենք $\bar{f}_0(x) = f_0(x) + \|x - x^*\|^2$ ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ x^* կետը $\bar{f}_0$ -ի միակ գլոբալ մինիմումի կետն է $\bar{Q} \equiv \{x \in M \cap B / f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, l\}$ բազմության վրա, որտեղ B -ն x^* կենտրոնով կամայական փակ գունդ է: Դիտարկենք $F_k(x) = \bar{f}_0(x) + P_k(x)$ ֆունկցիաների ընտանիքը $\bar{M} \equiv M \cap B$ կոմպակտ բազմության վրա: Դիցուք x_k -ն $F_k(x)$ ֆունկցիայի գլոբալ մինիմումի կետն է $\bar{M}$ կոմպակտի վրա: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $x_k \rightarrow x^*$: Հաշվի առնելով սուբդիֆերենցիալի վերը նշված հատկությունները՝ ունենք $\partial F_k(x_k) = \partial \bar{f}_0(x_k) + 2k \sum_{i=1}^l \max(0, f_i(x_k)) \partial f_i(x_k)$: Ընդ որում, համաձայն գումարի սուբդիֆերենցիալի մասին հատկության՝ ունենք $\partial \bar{f}_0(x_k) = \partial f_0(x_k) + 2(x_k - x^*)$: Հետևաբար (6) անհրաժեշտ պայմանը տվյալ դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$0 \in \partial f_0(x_k) + 2(x_k - x^*) + 2k \sum_{i=1}^l \max(0, f_i(x_k)) \partial f_i(x_k) - K_M^*(x_k): \quad (7)$$

Կատարենք նշանակումներ՝

$$\mu_i^k = 2k \max(0, f_i(x_k)), \mu^k = 1 + \sum_{i=1}^l \mu_i^k, \quad \lambda_0^k = \frac{1}{\mu^k}, \quad \lambda_i^k = \frac{\mu_i^k}{\mu^k}, \quad i = 1, 2, \dots, l:$$

Հաշվի առնելով այս նշանակումները (7)-ից՝ կստանանք՝

$$0 \in \lambda_0^k \partial f_0(x_k) + 2\lambda_0^k (x_k - x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^k \partial f_i(x_k) - K_M^*(x_k): \quad (8)$$

Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունեն վեկտորներ $v_0^k \in \partial f_0(x_k), v_i^k \in \partial f_i(x_k), i = 1, 2, \dots, l$ այնպիսին, որ

$$\lambda_0^k v_0^k + 2\lambda_0^k (x_k - x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^k v_i^k \in K_M^*(x_k): \quad (9)$$

Քանի որ $\{y_i^k\}, i = 0, 1, \dots, l$ հաջորդականությունները սահմանափակ են և

$$\lambda_i^k \geq 0, i = 0, 1, \dots, l, \quad \sum_{i=0}^l \lambda_i^k = 1,$$

ապա ընդհանրությունը չխախտելով, կարող ենք ենթադրել, որ

$$\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i, \quad y_i^k \rightarrow v_i, \quad i = 0, 1, \dots, l:$$

Ընդ որում, ակնհայտ է, որ $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, l, \sum_{i=0}^l \lambda_i = 1$, այսինքն $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ թվերից գոնե մեկը զրո չէ: Քանի որ $x_k \rightarrow x^*$ և $x \rightarrow \partial f_i(x), i = 0, 1, \dots, l, x \rightarrow K_M^*(x)$ բազմարժեք

արտապատկերումները կիսաանընդհատ են վերևից, ապա անցնելով սահմանի՝ (9)-ից կստանանք՝ $\sum_{i=0}^l \lambda_i v_i \in K_M(x^*)$, $v_i \in \partial f_i(x^*)$, $i = 0, 1, \dots, l$:

Նկատենք նաև, որ եթե $f_i(x^*) < 0$, ապա բավականաչափ մեծ k -երի դեպքում $\mu_i^k = 0$, և հետևաբար $\lambda_i^k = 0$, այսինքն՝ $\lambda_i = 0$: Այսպիսով, թեորեմի բ) պայմանը նույնպես կատարվում է: Թեորեմը ապացուցվեց:

Դիտողություն: Հայտնի է նաև, որ եթե $\lambda_0 > 0$, ապա Կուն-Տակկերի թեորեմը նաև բավարար պայմանն է (3) ուռուցիկ խնդրի համար (Խաչատրյան Ռ.Ա., 2020 էջ 165):

Այժմ դիտարկենք Շտեյնների խնդիր. հարթության վրա գտնել մի կետ, որ նրա հեռավորությունների գումարը տրված երեք կետերից լինի մինիմալ:

Ֆորմալ այս խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ՝

$$f_0(x) = \|x - x^1\| + \|x - x^2\| + \|x - x^3\| \rightarrow \min,$$

որտեղ x^1, x^2 և x^3 -ը տրված կետերն են: Սա ուռուցիկ խնդիր է առանց սահմանափակումների: Քանի որ $f_0(x) \rightarrow +\infty$, երբ $\|x\| \rightarrow +\infty$, ապա ըստ Վայերշտրասի թեորեմի այս խնդիրը ունի լուծում: Այն նշանակենք՝ $\hat{x}$:

Ըստ Կուն Տակկերի թեորեմի անհրաժեշտության՝ ունենք՝ $0 \in \partial f(\hat{x})$:

Այստեղ հնարավոր է հետևյալ երկու դեպքերից մեկը՝

$$\text{ա) } \hat{x} \neq x^i, i = 1, 2, 3; \quad \text{բ) } \hat{x} \in \{x^1, x^2, x^3\}$$

$$\text{ա) դեպքում կունենանք՝ } \partial f_0(\hat{x}) = \frac{\hat{x} - x^1}{\|\hat{x} - x^1\|} + \frac{\hat{x} - x^2}{\|\hat{x} - x^2\|} + \frac{\hat{x} - x^3}{\|\hat{x} - x^3\|}:$$

Սա նշանակում է, որ միևնույն $\hat{x}$ սկզբնակետով երեք միավոր վեկտորների գումարը հավասար է զրոյի: Այստեղից հետևում է, որ $\hat{x}$ կետից $[x, x^2]$, $[x^1, x^3]$, $[x^2, x^3]$ հատվածները երևում են 120° անկյան տակ: $\hat{x}$ կետը կոչվում է Տորիչելլի կետ:

բ) դեպքում ենթադրենք $\hat{x} = x^1$: Անհրաժեշտ պայմանից կստանանք՝

$$n + \frac{\hat{x} - x^2}{\|\hat{x} - x^2\|} + \frac{\hat{x} - x^3}{\|\hat{x} - x^3\|} = 0, \text{ որտեղ } n \in \partial \|x\|(0) = B_1(0):$$

Այստեղից, $\|n\| \leq 1$: Հետևաբար $x^2 x^1 x^3$ անկյունը մեծ կամ հավասար է 120° -ից: Քանի որ ըստ դիտողության $0 \in \partial f_0(\hat{x})$ պայմանը նաև մինիմումի բավարար պայման է, ապա վերջնականորեն կարող ենք կատարել հետևյալ եզրակացությունը.

Եթե եռանկյան բոլոր անկյունները փոքր են 120° -ից, ապա Շտեյնների խնդրի լուծումը Տորիչելլի կետն է:

Եթե եռանկյունը բութանկյուն է, ապա խնդրի լուծումը բութ անկյան գագաթն է:

Վերջում նշենք, որ ուռուցիկ անալիզում Կուն-Տակկերի թեորեմի ապացույցը հիմնականում կատարվում է ուռուցիկ բազմությունների անջատման հայտնի սկզբունքի հիման վրա (Խաչատրյան Ռ.Ա., 2020 էջ 162):

2. Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը (հավասարության տիպի սահմանափակումների դեպքը)

Այժմ դիտարկենք մաթեմատիկական ծրագրավորման հետևյալ խնդիրը հավասարության տիպի սահմանափակումների դեպքում.

$$f_0(x) \rightarrow 0, \quad x \in G \equiv \{x \in M / f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, l\}: \quad (10)$$

Ողորկ ֆունկցիաների դեպքում որպես էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման հանդես է գալիս Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը: Այն հետևյալն է. դիցուք x^* -ը (10) խնդրի լուծումն է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ թվեր (անորոշ գործակիցներ), որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, որ $\sum_{i=0}^l \lambda_i f_i'(x^*) = 0$:

Սա նշանակում է, որ x^* կետը $L(x, \lambda) \equiv \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i(x)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետն է ամբողջ տարածության վրա: Փաստորեն պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրը բերվում է ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդրի: Առաջին անգամ այս սկզբունքը առաջարկվել է Լագրանժի կողմից 1797 թվականին:

Այժմ ենթադրենք, որ բոլոր $f_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, l$ ֆունկցիաները լոկալ լիպշիցյան են և տուգանքների մեթոդով հիմնավորենք Լագրանժի սկզբունքը այս ոչ ողորկ դեպքի համար:

Սահմանում 3: Կասենք, որ f ֆունկցիան լիպշիցյան է x կետի շրջակայքում L հաստատունով, եթե գոյություն ունի այդ կետի մի այնպիսի V շրջակայք, որ

$$|f(y) - f(y')| \leq L \|y - y'\|, \quad \forall y, y' \in V:$$

Հեշտ է տեսնել, որ այդ պայմանին բավարարող ֆունկցիաները պարտադիր չէ, որ լինեն դիֆերենցելի, ինչպես նաև ունենան ածանցյալներ ըստ ուղղությունների: Սակայն լոկալ լիպշիցյան ֆունկցիաները ունեն ընդհանրացված ածանցյալ ըստ ուղղությամբ: Այդ գաղափարը ներմուծվել է Ֆ. Կլարկի կողմից (Кларк Ф., 1988) աշխատությունում:

Սահմանում 4: Դիցուք f -ը լիպշիցյան է x կետի շրջակայքում: f ֆունկցիայի ընդհանրացված ածանցյալ x կետում v վեկտորի ուղղությամբ կոչվում է հետևյալ վերին սահմանը՝

$$f^0(x, v) \equiv \lim_{y \rightarrow x, \lambda \downarrow 0} \sup \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}:$$

Նշանակենք

$$\partial^0 f(x) = \{ \zeta \in R^n / f^0(x, v) \geq (\zeta, v) \forall v \} :$$

Այս բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի ընդհանրացված սուբգրադիենտ (Կլարկի իմաստով) x կետում:

Նշենք այս սուբգրադիենտի որոշ հատկություններ, որոնք մենք կօգտագործենք հետագայում:

- $\partial^0(f_1 + f_2)(x) \subseteq \partial^0 f_1(x) + \partial^0 f_2(x)$:
- $\partial^0(f^2)(x) \subseteq 2f(x)\partial^0 f(x)$:
- $x \rightarrow \partial^0 f(x)$ բազմարժեք արտապատկերումը կիսաանընդհատ է վերևից:
- Եթե $f(x)$ -ը անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է x կետի շրջակայքում, ապա

$$\partial^0 f(x) = f'(x):$$

Դիցուք M -ը փակ բազմություն է R^n -ից: Դիտարկենք նրա հեռավորության ֆունկցիան, այսինքն՝

$$d_M(x) = \inf \{ \|x - y\|, y \in M \} :$$

Հայտնի է, որ այն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին մեկ հաստատունով R^n -ի վրա:

Սահմանում 5: Դիցուք $x \in M$: Կասենք, որ v վեկտորը շոշափում է M բազմությանը (Կլարկի իմաստով) x կետում, եթե $d^0(x, v) = 0$: M բազմությանը կետում շոշափող բոլոր վեկտորների բազմությունը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $T_M(x)$:

Հայտնի է, որ եթե $\text{int } T_M(x^*) \neq 0$, ապա $x \rightarrow T_M(x^*)$ բազմարժեք արտապատկերումը կիսաանընդհատ է վերևից x^* կետում (Rockefeller R., 1979):

Տեղի ունի էքստրեմումի հետևյալ ընդհանուր անհրաժեշտ պայմանը, որից մենք կօգտվենք (10) խնդրում Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը հիմնավորելու համար:

Թեորեմ 4: Դիցուք f -ը լիպշիցյան է $x \in M$ կետի շրջակայքում, և այդ կետը f ֆունկցիայի գլոբալ մինիմումի կետն է M -ի վրա: Այդ դեպքում՝

$$0 \in \partial^0 f(x) - T_M^*(x): \quad (11)$$

Թեորեմ 5: Դիցուք x^* -ը (10) խնդրի լուծումն է, որտեղ

- 1) $f_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, l$ Ֆունկցիաները
լիպշիցյան են x^* կետի շրջակայքում:
- 2) M -ը փակ ենթաբազմություն է R^n -ից և
 $\text{int } T_M(x^*) \neq 0$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, այնպիսին, որ

$$0 \in \sum_{i=0}^l \lambda_i \partial^0 f(x^*) - T_M^*(x^*):$$

Ապացույց: Այս թեորեմի ապացույցը անալոգ է թեորեմ 3-ի ապացույցին: Կիրառենք տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդը, բայց այս անգամ որպես տուգանքներ վերցնենք (2) հավասարությանը որոշվող ֆունկցիաների ընտանիքը: Ունենք $F_k(x) = \bar{f}_0(x) + P_k(x)$ և հաշվի առնելով Կլարկի սուբգրիֆերենցիալի վերը նշված հատկությունները $F_k(x)$ ՝ ֆունկցիայի սուբգրիֆերենցիալի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\partial^0 F_k(x) \subseteq \partial^0 f_0(x) + 2(x_k - x^*) + \sum_{i=1}^l 2k f_i(x_k) \partial^0 f_i(x_k):$$

Քանի որ x_k կետերում պետք է կատարվի (11) անհրաժեշտ պայմանը, ապա այն տվյալ դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$0 \in \partial^0 f_0(x_k) + 2(x_k - x^*) + \sum_{i=1}^l 2k f_i(x_k) \partial^0 f_i(x_k) - T_M^*(x_k): \quad (12)$$

Նշանակենք

$$\zeta_i^k = 2k f_i(x_k), \quad \zeta^k = 1 + \sum_{i=1}^l |\zeta_i^k|, \quad \lambda_0^k = \frac{1}{\zeta^k}, \quad \lambda_i^k = \frac{\zeta_i^k}{\zeta^k}, \quad i = 1, 2, \dots, l:$$

Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունեն վեկտորներ՝

$$v_0^k \in \partial f_0(x_k), \quad v_i^k \in \partial^0 f_i(x_k), \quad i = 1, 2, \dots, l$$

անպիսին, որ (12) -ից հետևում է, որ

$$\lambda_0^k v_0^k + 2\lambda_0^k (x_k - x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^k v_i^k \in T_M^*(x_k): \quad (13)$$

Քանի որ $\{v_i^k\}, i = 0, 1, 2, \dots, l$ հաջորդականությունները սահմանափակ են և $\sum_{i=1}^l |\lambda_i^k| = 1$,

ապա ընդհանրությունը չխախտելով՝ կարող ենք ենթադրել, որ

$$\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i, \quad v_i^k \rightarrow v_i, \quad i = 0, 1, \dots, l:$$

Ընդ որում, ակնհայտ է, որ $\sum_{i=1}^l |\lambda_i| = 1$, այսինքն $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ թվերից գոնե մեկը զրո չէ: Քանի

որ $x_k \rightarrow x^*$ և $x \rightarrow \partial^0 f_i(x), i = 0, 1, \dots, l, x \rightarrow T_M^*(x)$

բազմարժեք արտապատկերումները կիսաանընդհատ են վերևից, ապա անցնելով սահմանի՝ (13)-ից կստանանք՝ $\sum_{i=1}^l \lambda_i v_i \in T_M^*(x^*), v_i \in \partial^0 f_i(x^*), i = 0, 1, \dots, l:$

Թեորեմն ապացուցվեց:

Դիտողություն 1: Նշենք, որ թեորեն 5-ում ստացված Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը, ի տարբերություն Կուն-Տակկերի թեորեմի, էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայման է: Բերենք օրինակ այդ փաստը հաստատելու համար:

Օրինակ:

$$f_0(x_1, x_2) = x_1^2 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \rightarrow \min ,$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 + |x_1| = 0 :$$

Ունենք

$$\partial^0 f_0(0,0) = \left\{ (x_1^*, x_2^*) \in R^2 / x_2^* = -1, x_1^* \in [-1,1] \right\},$$

$$\partial^0 f_1(0,0) = \left\{ (x_1^*, x_2^*) \in R^2 / x_2^* = 1, x_1^* \in [-1,1] \right\} :$$

Ակնհայտ է, որ $(0,0)$ կետը այս խնդրի լուծումը չէ, բայց $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 1$ գործակիցների դեպքում տեղի ունի

$$0 \in \lambda_0 \partial^0 f_0(0,0) + \lambda_1 \partial^0 f_1(0,0)$$

անհրաժեշտ պայմանը:

Դիտողություն 2: Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդի հիմնավորումը (10) խնդրի համար բանախյան տարածությունում տրված է Ֆ. Կլարկի կողմից (Clarke F., 1976) հոդվածում: Ապացույցը կատարվում է Էկլանդի հայտնի վարիացիոն սկզբունքի հիման վրա:

Եզրակացություններ

Ամփոփելով կատարված հետազոտությունը՝ հանգել ենք հետևյալներին.

- տուգանքային ֆունկցիաների մեթոդը հանդիսանում է ընդհանուր եղանակ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրներում անհրաժեշտ պայմանների ստացման մեջ:
- Ապացուցվում է Կուն-Տակկերի թեորեմը ուռուցիկ ծրագրավորման ոչ ողորկ խնդիրներում:
- Հիմնավորվում է նաև Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը հավասարության տիպի ոչ ողորկ խնդիրների համար: Անհրաժեշտ պայմաններն արտահայտվում են ընդհանրացված գրադիենտների (սուբգրադիենտների) լեզվով:
- Օրինակների վրա մեկնաբանվում են ստացված պայմանները: Մասնավորապես տարրական երկրաչափությունից հայտնի Շտեյնների խնդիրը լուծվում է ստացված անհրաժեշտ պայմանների հաշվառմամբ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

Խաչատրյան Ռ.Ա. (2020). *Օպտիմիզացիայի մեթոդներ*, ԵՊՀ, հրատ.

Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. (1981). *Недифференцируемая оптимизация*. М. Наука.

Кларк Ф. (1988). *Оптимизация и негладкий анализ*. М. Наука.

- Пшеничный Б.Н. (1980). *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, М. Наука.
- Сухарев А.Г., Тимохов А.Г., Федоров В.В. (1966). *Курс методов оптимизации*, М. Наука.
- Федоров В.В. (1979). *Численные методы максимина*. М. Наука.
- Clarke F. *A new approach to Lagrange multipliers*. Math. Oper., Res., 1. pp. 682-699.
- Rockafellar R.T. (1979)., *Clarke's tangent cones and the boundaries of closed set, in R^n* , *Nonlinear Analysis, Theory and Applications*, pp.145-154.

REFERENCE LIST

- Hachatryan R.A. (2020). *Metody optimizacii (Optimization methods)*, EGU, izd.
- Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. (1981). *Nedifferenciруемая оптимизация (Non-differentiable optimization)*. М. Nauka.
- Klark F. (1988). *Optimizaciya i negladkij analiz (Optimization and non-smooth analysis)*. М. Nauka.
- Pshenichnyj B.N. (1980). *Vypuklyj analiz i ekstremal'nye zadachi (Convex analysis and extremal problems)*, М. Nauka.
- Suharev A.G., Timohov A.G., Fedorov V.V. (1966). *Kurs metodov optimizacii (Optimization Methods Course)*, М. Nauka.
- Fedorov V.V. (1979). *Chislennyye metody maksimina (Numerical maximin methods)*. М. Nauka.
- Clarke F. *A new approach to Lagrange multipliers*. Math. Oper., Res., 1. pp. 682-699.
- Rockafellar R.T. (1979)., *Clarke's tangent cones and the boundaries of closed set, in R^n* , *Nonlinear Analysis, Theory and Applications*, pp.145-154.

ABSTRACT

THE PENALTY FUNCTIONS METHOD AND OPTIMALITY CONDITIONS

KHACHATRYAN R., STEPANYAN S.

The presented work is devoted to one of the most important areas of applied mathematics, namely mathematical programming.

The following general mathematical programming problem is considered

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,k, \quad f_i(x)=0, \quad i=(k+1),\dots,m, \quad x \in M \subset R^n,$$

where $f_i(x)$, $i=1,2,\dots,m$ are Lipschitz, and M is closed set.

The purpose of the work is to obtain optimality conditions for the problem posed using the method of penalty functions.

The obtained necessary conditions are expressed in the language of subdifferentials, which are a generalization of the method of indefinite Lagrange coefficients for nonsmooth optimization problems.

Key words: Lipschitz functions, convex functions, Clark's subdifferential, Lagrange coefficients.

РЕЗЮМЕ

МЕТОД ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

ХАЧАТРЯН Р., СТЕПАНЯН С.

Представленная работа посвящена одному из важнейших направлений прикладной математики, а именно математическому программированию.

Рассматривается следующая общая задача математического программирования

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad f_i(x) = 0, \quad i = (k+1), \dots, m, \quad x \in M \subset R^n,$$

где $f_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ липшицевы функции а M замкнутое множество.

Цель работы – получение условий оптимальности для поставленной задачи с использованием метода штрафных функций.

Полученные необходимые условия выражаются на языке субдифференциалов, которые являются обобщением метода неопределенных коэффициентов Лагранжа для негладких задач оптимизации.

Ключевые слова: Липшицевые функции, выпуклые функции, субдифференциал Кларка, неопределенные коэффициенты Лагранжа.