ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXV 1962 5

МАТЕМАТИКА

С. Л. Певзнер

Квадрики в трехмерном неевклидовом пространстве индекса 2

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 5/VII 1962)

Рассматриваются квадрики в пространстве $^2S_3$—трехмерном неевклидовом пространстве индекса 2. Абсолютом такого пространства является кольцеобразная квадрика

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0. \tag{1}$$

Ставится задача: *найти все канонические уравнения и полную систему инвариантов квадрик в пространстве* $^2S_3$.

Условимся об обозначениях.

Матрицы коэффициентов квадрики и абсолюта будем обозначать соответственно A и G. Сумму главных миноров порядка α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) матрицы $A - \lambda G$ обозначим $P_\alpha(\lambda)$. Обозначения коэффициентов характеристического многочлена видны из формулы:

$$\mathrm{Det}\,|A - \lambda G| = \lambda^4 - R_1\lambda^3 + R_2\lambda^2 - R_3\lambda + R_4.$$

Здесь R_α—суммы главных миноров матрицы A, причем некоторые миноры берутся с противоположным знаком. Такие же суммы главных миноров матрицы $A - \lambda G$ будем обозначать $R_\alpha(\lambda)$.

Далее приводятся канонические уравнения квадрик всех типов (эти канонические уравнения получаются из результатов ([1])) с указанием всех инвариантов каждого из них. Типы отличаются один от другого характеристикой (списком степеней элементарных делителей) λ-матрицы $A - \lambda G$ и количеством вещественных характеристических чисел. Всюду дальше те характеристические числа λ_i, о которых не сделано специальной оговорки, считаются вещественными.

[1111]. *Центральные квадрики*:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_3 x_3^2 - \lambda_4 x_4^2 = 0. \tag{2}$$

Нужно отличать одну пару характеристических чисел от другой. Если λ' и λ''—однократные характеристические числа и

$$\eta = \mathrm{sign}\, R_3(\lambda')\, P_3(\lambda')\, R_3(\lambda'')\, P_3(\lambda''), \tag{3}$$

то λ' и λ'' принадлежат одной паре при $\eta = 1$ и разным — при $\eta = -1$. Если λ' — двукратное характеристическое число и

$$\eta_1 = \operatorname{sign} R_2(\lambda') P_2(\lambda'), \tag{4}$$

то оба характеристических числа λ' входят в одну пару при $\eta_1 = 1$ и в разные — при $\eta_1 = -1$.

[1111]. *Симметричные полугиперболические квадрики:*

$$\lambda_1 x_1^2 - \lambda_3 x_3^2 + a x_2^2 + 2b x_2 x_4 - a x_4^2 = 0, \quad \lambda_{2,4} = a \pm bi. \tag{5}$$

[1111]. *Несимметричные полугиперболические квадрики:*

$$a x_1^2 + 2b x_1 x_3 - a x_3^2 + c x_2^2 + 2b x_2 x_4 - c x_4^2 = 0, \tag{6}$$

$$\lambda_{1,3} = a \pm bi, \quad \lambda_{2,4} = c \pm di.$$

[211]. *Симметричные параболические квадрики 1-го рода:*

$$\frac{\varepsilon}{2}(x_1 - x_3)^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 x_3^2 - \lambda_4 x_4^2 = 0. \tag{7}$$

При λ_1, двукратном —

$$\varepsilon = \operatorname{sign} \frac{P_3(\lambda_1) R_3(\lambda_4) P_3(\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_4)}, \tag{8}$$

при λ_1, трехкратном —

$$\varepsilon = \operatorname{sign} \frac{P_3(\lambda_1) R_3(\lambda_4) P_3(\lambda_4)}{\lambda_1 - \lambda_4}. \tag{9}$$

[211]. *Несимметричные параболические квадрики 1-го рода:*

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 + \lambda_1 x_1^2 - \lambda_3 x_3^2 + a x_2^2 + 2b x_2 x_4 - a x_4^2 = 0, \quad \lambda_{2,4} = a \pm bi. \tag{10}$$

[31]. *Параболические квадрики 2-го рода:*

$$\sqrt{2}(x_1 - x_3) x_2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 - \lambda_1 x_3^2 - \lambda_4 x_4^2 = 0, \tag{11}$$

[4]. *Параболические квадрики 3-го рода:*

$$2(x_1 + x_4)(x_2 - x_3) + (x_2 + x_3)^2 + 2\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) = 0. \tag{12}$$

[22]. *Бипараболические квадрики:*

$$\lambda_1 (x_1^2 - x_3^2) + \lambda_3 (x_2^2 - x_4^2) + \delta (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x^4)^2 = 0. \tag{13}$$

При $\lambda_1 \neq \lambda_3$

$$\delta = \operatorname{sign} P_3(\lambda_1) P_3(\lambda_3), \tag{14}$$

при $\lambda_1 = \lambda_3$

$$\delta = \operatorname{sign} P_2(\lambda_1). \tag{15}$$

[22]. *Бипараболические квадрики с мнимой параболичностью*

$$a(x_1^2 - x_3^2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 - a(x_2^2 - x_4^2) - \frac{1}{2}(x_2 - x_4)^2 +$$

$$+ 2b(x_1 x_2 - x_3 x_4) = 0, \quad \lambda_{1,3} - \lambda_{2,4} = a \pm bi. \tag{16}$$

Таким образом, *полная система инвариантов квадрик в пространстве* $^2S_3$ *состоит из элементарных делителей матрицы* $A - \lambda G$ *и величин* η, η_1, ε, δ. При выводе формул для η и η_1 использован способ ([2]). Инварианты ε и δ находятся *способом малых деформаций абсолюта*, в основе которого лежит замена абсолюта (1) на

$$x_1^2 + x_2^2 - (1 + \alpha)(x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

где α — малое.

Ս. Լ. ՊԵՎԶՆԵՐ

Երկու ինդեքսով 2-րդ կարգի մակերևույթները եռաչափ ոչ էվկլիդյան տարածությունում

Դիտարկվում է 2-րդ կարգի մակերևույթը երկու ինդեքսով ոչ էվկլիդյան տարածությունում $^2S_3$*: Այսպիսի տարածության բացարձակը հանդիսանում է 2-րդ կարգի գծավոր մակերևույթ ([1]): Լուծվում է հետևյալ խնդիրը. գտնել* $^2S_3$ *տարածությունում 2-րդ կարգի մակերևույթի բոլոր կանոնական հավասարումները և ինվարիանտների լրիվ սիստեմը: Կանոնական հավասարումները ներկայացվում է հետևյալ բանաձևով (2), (5)—(7), (10)—(13), (16):*

Ինվարիանտների լրիվ սիստեմը կազմված է 2-րդ կարգի մակերևույթի և բացարձակի հավասարման գործակիցներից կազմված մատրիցայի էլեմենտար բաժանարարներից և η, η_1, ε, δ *մեծություններից, որոնք որոշվում են (3), (4), (8)—(9), (14)—(15) բանաձևերից:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. Б. Ермолаев*, ДАН СССР, 132, № 2, (1960), 257—259. [2] *В. Ф. Каган*. Основания геометрии, ч. II, М., ГИТТЛ, 1956.