

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян, чл.-корр. АН Армянской ССР

Двусторонние приближения для задачи изгиба опертой плиты

(Представлено 22/VI 1962)

Рассматривается задача об изгибе опертой по контуру тонкой плиты при следующих ограничениях.

Срединная плоскость плиты (расположенная в плоскости $X Y$) заполняет односвязную область G , ограниченную контуром L , кривизна $\frac{1}{\rho}$ которого непрерывна и неотрицательна.

1. Прогиб опертой плиты разложим в ряд по степеням $1-\sigma$ (σ —коэффициент Пуассона)

$$W = \frac{1}{D} \left[w_0(x, y) + \sum_1^{\infty} (1-\sigma)^k w_k(x, y) \right], \quad (1.1)$$

где D —жесткость плиты, а функции $w_k(x, y)$ —являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{aligned} &\text{в } G \quad \nabla^2 \nabla^2 w_0 = p, \text{ на } L \quad w_0 = 0, \nabla^2 w_0 = 0, \\ &\text{в } G \quad \nabla^2 \nabla^2 w_k = 0, \text{ на } L \quad w_k = 0, \nabla^2 w_k = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_{k-1}}{\partial \nu}, (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (1.2)$$

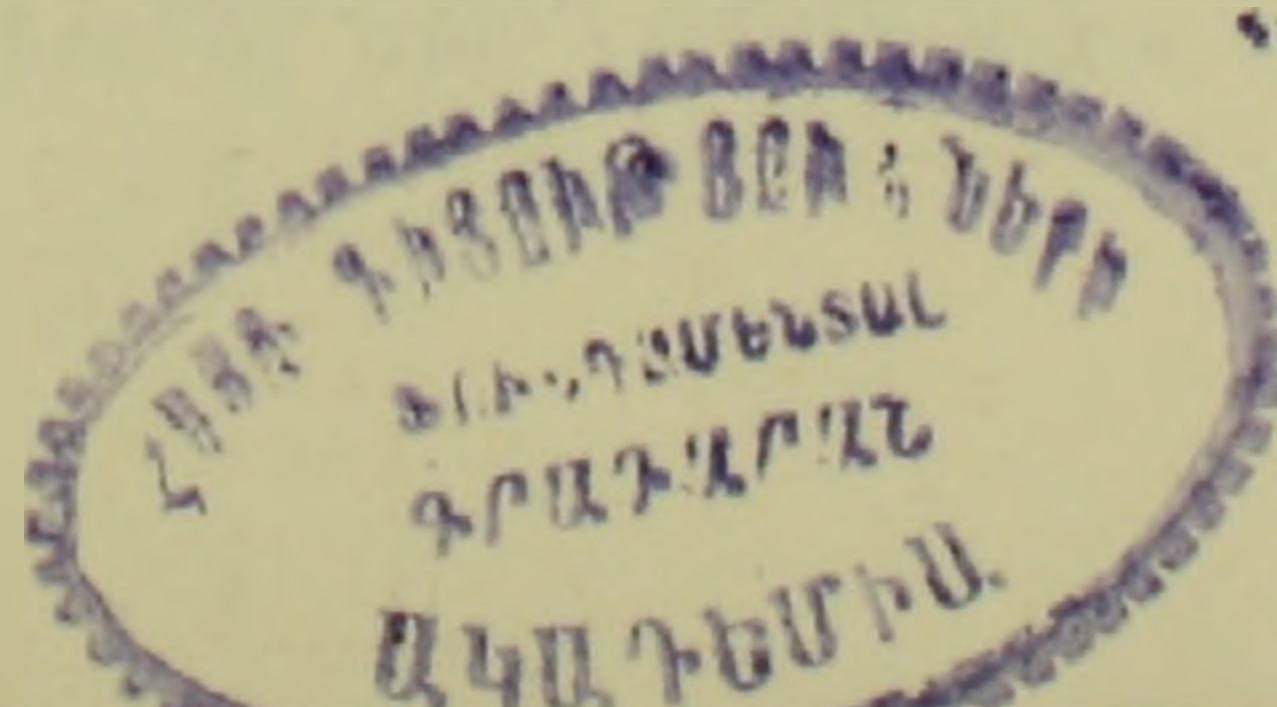
здесь $p(x, y)$ —интенсивность нагрузки, ν —внешняя нормаль контура, ∇^2 —оператор Лапласа.

Задачи (1.2) решаются последовательно. Легко доказать разрешимость этих задач для области G .

Выражение (1.1), с учетом (1.2), формально удовлетворяет условиям краевой задачи опертой плиты.

2. Для доказательства сходимости ряда (1.1) и его производных будем часто пользоваться следующей теоремой, вытекающей из минимальных свойств гармонических и супергармонических функций.

Теорема 1. Пусть в G функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \nabla^2 \Phi = f(x, y)$, а на L выполняются условия $\Phi = 0$, $\nabla^2 \Phi = -\varphi(s)$, причем в G функция $f(x, y) \geq 0$ и кусочно непрерывна, а на L $\varphi(s) \geq 0$ и непрерывна. Если при этом $f(x, y)$ и $\varphi(s)$ одновременно не обра-



щаются тождественно в нуль, то в G $\Phi > 0$, $\nabla^2 \Phi < 0$, на L $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \leq 0$.

Применяя теорему I к краевым задачам (1.2) и полагая $p(x, y) \geq 0$, получим при $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{в } G \quad w_k > 0, \quad \nabla^2 w_k < 0, \quad \text{на } L \quad \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \leq 0. \quad (2.1)$$

3. Будем пользоваться также следующей вспомогательной краевой задачей

$$\text{в } G \quad \nabla^2 \nabla^2 u = p, \quad \text{на } L \quad u = 0, \quad \nabla^2 u = -\frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\max}. \quad (3.1)$$

Можно показать, что эта задача будет иметь решение, если на L имеет место условие

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| < 1, \quad (3.2)$$

где $v(x, y)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\text{в } G \quad \nabla^2 \nabla^2 v = 0, \quad \text{на } L \quad v = 0, \quad \nabla^2 v = -\frac{1}{\rho}. \quad (3.3)$$

Покажем, что для эллипса условие (3.2) удовлетворяется.

Кривизина L_ρ (контур эллипса) равна $\frac{1}{\rho} = \frac{b}{a^2} \frac{1}{[1 - (a^2 - b^2)x^2/a^4]^{3/2}} = f_1(x)$, где a и b — полуоси L_ρ , x — абсцисса произвольной точки L_ρ .

Заменим во втором контурном условии (3.3) $\frac{1}{\rho}$ на $f_2(x)$, полагая

$$f_2(x) = \frac{b}{a^2} \left(1 - \frac{a^3 - b^3}{a^2 b^3} x^2 \right) \geq f_1(x).$$

Решение $v^*(x, y)$ этой новой задачи получается в замкнутом виде, причем на контуре L_ρ имеем:

$$\text{при } a:b < \infty, \quad \left| \frac{\partial v^*}{\partial \nu} \right| < 1; \quad \text{при } a:b \rightarrow \infty, \quad \left| \frac{\partial v^*}{\partial \nu} \right| = 1.$$

Однако в последнем случае, согласно (3.3), $v(x, y) \equiv 0$.

Рассматривая краевую задачу для $v^*(x, y) - v(x, y)$ и применяя теорему I, получим

$$\text{на } L_\rho \quad \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| \leq \left| \frac{\partial v^*}{\partial \nu} \right|,$$

следовательно, для эллипса условие (3.2) выполняется.

4. Рассматривая последовательно краевые задачи для функций $u = w_0$, $u = w_0 - w_1, \dots$, учитывая при этом (1.2), (2.1), (3.1) и тео-

рему I, а также полагая, что задача (3.1) имеет решение, докажем, что на L ряд

$$\sum_1^{\infty} \left| \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \right| \quad (4.1)$$

сходится.

Приведем еще одно доказательство сходимости ряда (4.1), основанное на следующем предположении.

Существует такая нагрузка $q(x, y) \geq p(x, y) \geq 0$, при которой прогибы опертой плиты в G положительны.

Обозначим $Dw = w^*$. Для $w^*(x, y)$ при действии $q(x, y)$ имеем краевую задачу (полагаем $\sigma = 0$)

$$\text{в } G \quad \nabla^2 \nabla^2 w^* = q, \text{ на } L \quad w^* = 0, \quad \nabla^2 w^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^*}{\partial \nu}. \quad (4.2)$$

Рассматривая последовательно краевые задачи для функций $w^* - w_0$, $w^* - w_0 - w_1, \dots$, с учетом (1.2), (2.1), (4.2) и теоремы I доказываем сходимость ряда (4.1).

5. Укажем способ доказательства равномерной сходимости ряда (1.1) и его производных.

Бигармонические функции $w_k(x, y)$ ($k = 1, 2, \dots$) можно представить так:

$$w_k(x, y) = \int_L \Gamma(x, y, s) M_\nu \left(\frac{w_k}{D} \right) ds, \quad (5.1)$$

где $\Gamma(x, y, s)$ — прогиб в точке (x, y) области G опертой плиты при $\sigma = 0$, возникающий от единичного контурного изгибающего момента, приложенного в произвольной точке контура L с дуговой абсциссой

$M_\nu \left(\frac{w_k}{D} \right)$ — контурный изгибающий момент, соответствующий прогибу $\frac{w_k}{D}$ при $\sigma = 0$.

С помощью (5.1), с учетом сходимости ряда (4.1) и формулы

$$M_\nu \left(\frac{w_k}{D} \right) = \frac{1}{\rho} \left[\left| \frac{\partial w_{k-1}}{\partial \nu} \right| - \left| \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \right| \right], \quad (k = 1, 2, \dots)$$

показываем, что ряд (1.1) и его производные по x и y до третьего порядка включительно равномерно сходятся в G вплоть до L , а четвертые производные равномерно сходятся в G . Следовательно, при $q(x, y) \geq 0$ выражение (1.1) точно совпадает с выражением прогиба опертой плиты.

Можно достигнуть той же цели, полагая $p(x, y) \leq 0$.

Поэтому формула (1.1) справедлива при любой нагрузке.

Из (1.1) следует, что при односторонней нагрузке абсолютное значение прогиба увеличивается при уменьшении коэффициента σ .

6. Установим двусторонние приближения для прогиба и изгибающих моментов.

Полагаем $p(x, y) \geq 0$ ($p(x, y) \leq 0$).

Будем предполагать, что на L выполняется условие

$$\left| \frac{\partial w_{n-1}}{\partial \nu} \right| : \left| \frac{\partial w_n}{\partial \nu} \right| = \lambda^{(n)}(s) > 1, \quad (6.1)$$

где n — фиксированное натуральное число.

Условие (6.1) можно проверить построением графика функции $\lambda^{(n)}(s)$.

Можно привести некоторые соображения физического характера, подтверждающие возможность выполнения условия (6.1). Эти соображения основаны на следующем предположении: согласно (1.1) с учетом (2.1), прогибы $w = \frac{w_0}{D}$, $w = \frac{w_0 + (1 - \sigma) w_1}{D}$... монотонно

убывают до нуля. Можно предположить, что абсолютные значения всех величин изгиба, соответствующих этим прогибам, также убывают до нуля.

Из (6.1) следует, что на L

$$1 < \lambda_{\min}^{(n)} \leq \left| \frac{\partial w_{n-1}}{\partial \nu} \right| : \left| \frac{\partial w_n}{\partial \nu} \right| \leq \lambda_{\max}^{(n)}. \quad (6.2)$$

Величины $\lambda_{\min}^{(n)}$ и $\lambda_{\max}^{(n)}$ определяются из графика функции $\lambda^{(n)}(s)$.

Заметим, что для круга при полярносимметричной нагрузке $\lambda^{(n)}(s) = 2$.

Рассматривая краевые задачи для функций

$$w_{n+k} = \lambda_{\min}^{(n)} w_{n+k+1}, \quad \lambda_{\max}^{(n)} w_{n+k+1} = w_{n+k}, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

с учетом (1.2), (2.1), (6.2) и теоремы 1, получим оценку

$$\text{в } G \quad \frac{w_n}{(\lambda_{\max}^{(n)})^k} \leq w_{n+k} \leq \frac{w_n}{(\lambda_{\min}^{(n)})^k} \quad (6.3)$$

и аналогичные оценки для $|\nabla^2 w_{n+k}|$ в G и $\left| \frac{\partial w_{n+k-1}}{\partial \nu} \right|$ на L .

Учитывая (6.3), находим оценку для остатка ряда (1.1)

$$\frac{(1 - \sigma)^{n+1} w_n(x, y)}{\lambda_{\max}^{(n)} - 1 + \sigma} \leq \sum_{n+1}^{\infty} (1 - \sigma)^k w_k(x, y) \leq \frac{(1 - \sigma)^{n+1} w_n(x, y)}{\lambda_{\min}^{(n)} - 1 + \sigma}. \quad (6.4)$$

Из (1.1), с учетом (6.4), определим значение прогиба с избытком (w^+) и с недостатком (w^-):

$$w^+ = \frac{1}{D} \left[w_0(x, y) + \sum_1^{n-1} (1 - \sigma)^k w_k(x, y) + \frac{\lambda_{\min}^{(n)} (1 - \sigma)^n}{\lambda_{\min}^{(n)} - 1 + \sigma} w_n(x, y) \right],$$

$$w = \frac{1}{D} \left[w_0(x, y) + \sum_1^{n-1} (1 - \sigma)^k w_k(x, y) + \frac{\lambda_{max}^{(n)} (1 - \sigma)^n}{\lambda_{max}^{(n)} - 1 + \sigma} w_n(x, y) \right].$$

Аналогичные формулы могут быть получены также для суммы изгибающих моментов M_x и M_y , а в случае симметричной относительно осей x и y задачи—для $M_x(0,0)$ и $M_y(0,0)$ в отдельности (если, конечно, эти моменты существуют).

В общем случае можно установить двусторонние приближения для $M_x(x, y)$ и $M_y(x, y)$, если сделать следующее предположение: при нагрузке $p(x, y) \geq 0$ во всех сечениях опертой плиты возникают неотрицательные изгибающие моменты.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

Երկկողմանի մոտեցում ազատ հենված սալի ծոման խնդրի համար

Դիտարկվում է եզրով ազատ հենված բարակ սալի ծոման խնդիրը հետևյալ սահմանափակումների դեպքում: Սալն ունի միակողմ տիրույթ, որի եզրագծի կորույթունն անընդհատ է և բացասական չէ:

Ճկվածքի և ծոցի մոմենտների համար ստացված են երկկողմանի մոտեցումներ: