ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXV 1962 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Об одном методе решения некоторых пространственных задач теории упругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 11/VI 1962)

В работе используются функции П. Ф. Папковича ([1]) для нахождения решения некоторых пространственных задач теории упругости. Рассматривается случай, когда тело вращения деформируется симметрично относительно плоскости одного из его осевых сечений.

Получены формулы, содержащие только переменные r и z.

В качестве примера приводится решение контактной задачи, рассмотренной В. М. Абрамовым ([4]), а также задачи о бесконечно длинном круглом цилиндре, изгибаемом боковой несимметричной нагрузкой.

1. Общее решение трехмерных задач теории упругости П. Ф. Папкович ([1, 2]) представил при помощи четырех гармонических функций. В цилиндрических координатах r, φ, z компоненты перемещения выражаются через эти гармонические функции формулами:

$$u_r(r,\varphi,z)=\Phi_1\cos\varphi+\Phi_2\sin\varphi-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

$$u_\varphi(r,\varphi,z)=-\Phi_1\sin\varphi+\Phi_2\cos\varphi-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \qquad (1.1)$$

$$u_z(r,\varphi,z)=\Phi_3-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

где

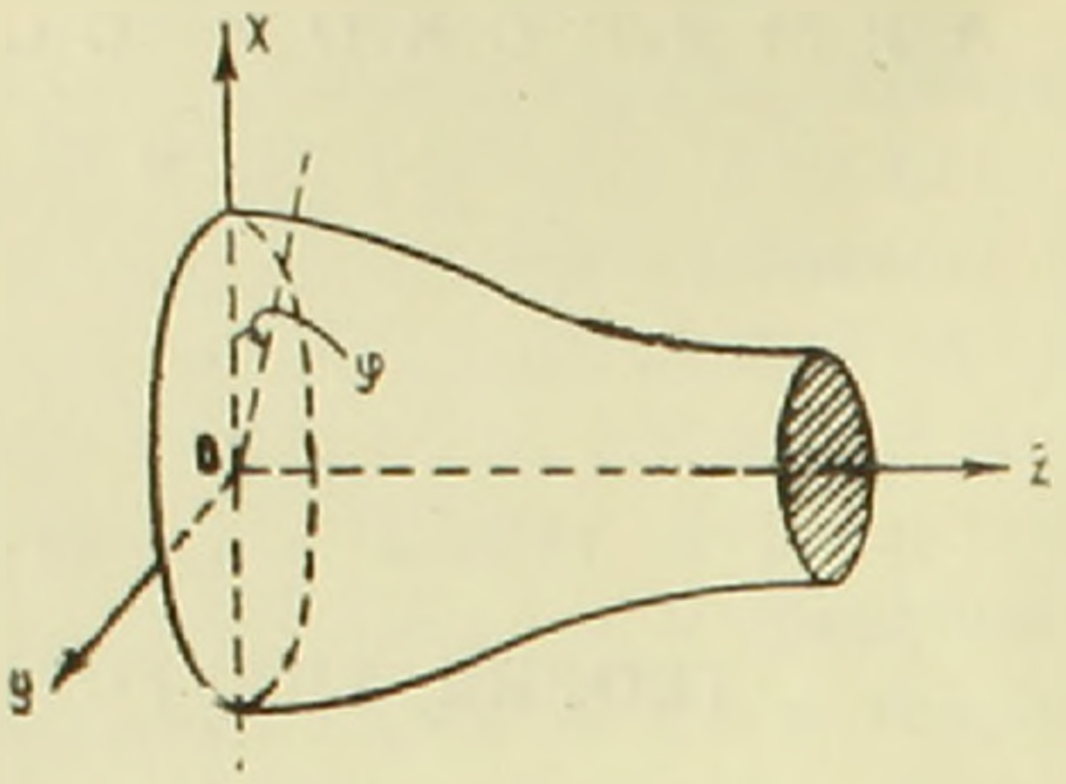
$$\Psi=r(\Phi_1\cos\varphi+\Phi_2\sin\varphi)+z\Phi_3+\Phi_0, \qquad (1.2)$$

$$\nabla^2\Phi_i=\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (1.3)$$

$$(i=0,1,2,3),$$

ν — коэффициент Пуассона.

Предположим, что однородное упругое тело деформируется симметрично относительно плоскости XOZ (фиг. 1). Тогда, отсчитывая угол φ от оси OX, мы заметим, что перемещения u_r и u_z являются четными функциями от φ, а перемещение u_φ — нечетной функцией.



Фиг. 1.

Ищем эти перемещения в виде рядов:

$$u_r(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, z) \cos k\varphi$$

$$u_\varphi(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r, z) \sin k\varphi. \tag{1.4}$$

$$u_z(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(r, z) \cos k\varphi.$$

Перемещения в таком виде представлены также в работе К. В. Соляника-Красса ([3]) при рассмотрении им некоторых задач теории упругости.

Подставляя выражения (1.4) в обычные формулы для напряжений, получим следующие соотношения:

$$\sigma_r(r, \varphi, z) = \sum_{k=}^{\infty} \sigma_r^{(k)}(r, z) \cos k\varphi$$

$$\sigma_\varphi(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_\varphi^{(k)}(r, z) \cos k\varphi$$

$$\sigma_r(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_z^{(k)}(r, z) \cos k\varphi$$

$$\tau_{r\varphi}(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{r\varphi}^{(k)}(r, z) \sin k\varphi \tag{1.5}$$

$$\tau_{\varphi z}(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{\varphi z}^{(k)}(r, z) \sin k\varphi$$

$$\tau_{rz}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{rz}^{(k)}(r, z) \cos k\varphi.$$

Здесь величины $\sigma_r^{(k)}, \sigma_\varphi^{(k)}, \ldots \tau_{rz}^{(k)}$ выражаются через u_k, v_k и w_k формулами:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^{(k)}(r, z) &= 2G\left(\frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta_k\right)\\
\sigma_\varphi^{(k)}(r, z) &= 2G\left(\frac{u_k + kv_k}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta_k\right)\\
\sigma_z^{(k)}(r, z) &= 2G\left(\frac{\partial w_k}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta_k\right)\\
\tau_{r\varphi}^{(k)}(r, z) &= G\left(\frac{\partial v_k}{\partial r} - \frac{v_k + k u_k}{r}\right)\\
\tau_{\varphi z}^{(k)}(r, z) &= G\left(\frac{\partial v_k}{\partial z} - \frac{kw_k}{r}\right)\\
\tau_{rz}^{(k)}(r, z) &= G\left(\frac{\partial w_k}{\partial r} + \frac{\partial u_k}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где введено обозначение

$$
\theta_k = \frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{u_k + k v_k}{r} + \frac{\partial w_k}{\partial z}.
$$

Для того чтобы упругое однородное тело деформировалось симметрично относительно плоскости XOZ, необходимо, чтобы поверхностные напряжения были заданы соответствующим образом. То есть, если обозначить через n направление нормали к элементарной площадке поверхности, тогда компоненты поверхностных сил R_n, Θ_n и Z_n этой площадки должны быть заданы в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
R_n &= \sigma_r \cos(rn) + \tau_{rz}\cos(nz) = \sum_{k=0}^{\infty} R_n^{(k)} \cos k\varphi,\\
\Theta_n &= \tau_{r\varphi}\cos(nr) + \tau_{\varphi z}\cos(nz) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_n^{(k)} \sin k\varphi,\\
Z_n &= \tau_{rz}\cos(nr) + \sigma_z \cos(nz) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_n^{(k)} \cos k\varphi,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R_n^{(k)} &= \sigma_r^{(k)} \cos(nr) + \tau_{rz}^{(k)}\cos(nz), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)\\
\Theta_n^{(k)} &= \tau_{r\varphi}^{(n)}\cos(nr) + \tau_{z\varphi}^{(k)}\cos(nz), \quad (k = 1, 2, \cdots)\\
Z_n^{(k)} &= \tau_{rz}^{(k)}\cos(nr) + \sigma_z^{(k)}\cos(nz), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\cos(nr) = \frac{dr}{dn} = \frac{dz}{ds},
$$

$$
\cos(nz) = \frac{dz}{dn} = -\frac{dr}{ds},
\tag{1.10}
$$

s — направление касательной к контуру осевого сечения.

Такая постановка задачи дает возможность искать гармонические функции $\Phi_i(r, \varphi, z)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ в виде разложений по тригонометрическим функциям по координате φ.

Функции Φ_i ищем в виде

$$\Phi_1(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{1k}(r, z) \cos(k+1)\varphi,$$

$$\Phi_2(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{1k}(r, z) \sin(k+1)\varphi, \tag{1.11}$$

$$\Phi_i(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ik}(r, z) \cos k\varphi$$

$$(i = 0, 3),$$

где функции $\varphi_{ik}(r, z)$ $(i = 0, 1, 3)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2_{k+1}\varphi_{1k} = 0, \quad \nabla^2_k \varphi_{3k} = 0, \quad \nabla^2_k \varphi_{0k} = 0, \tag{1.12}$$

$$\nabla^2_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\alpha^2}{r^2}. \tag{1.13}$$

Используя формулы (1.1), (1.4) и (1.11), будем иметь:

$$u_k(r, z) = \varphi_{1k} - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k}), \quad (k = 0, 1 \cdots)$$

$$v_k(r, z) = \varphi_{1k} + \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{k}{r}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k}), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{1.14}$$

$$w_k(r, z) = \varphi_{3k} - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k}), \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

Подставляя эти значения в (1.6), получим

$$\sigma_r^{(k)}(r, z) = 2G\left\{\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{0k} + \varphi_{0k}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\varphi_{1k} + \frac{\partial\varphi_{3k}}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\sigma_\varphi^{(k)}(r, z) = 2G\left\{\frac{k+1}{r}\varphi_{1k} - \frac{1}{4(1-\nu)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}\right)\left(r\varphi_{1k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k}\right) + \frac{\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\varphi_{1k} + \frac{\partial\varphi_{3k}}{\partial z}\right)\right\}, \tag{1.15}$$

$$\sigma_z^{(k)}(r, z) = 2G\left\{\frac{\partial\varphi_{3k}}{\partial z} - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\varphi_{1k} + \frac{\partial\varphi_{3k}}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\tau_{r\varphi}^{(k)}(r, z) = G\left\{\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} - \frac{k+1}{r}\varphi_{1k} + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k})\right]\right\}, \qquad (1.16)$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\tau_{\varphi z}^{(k)}(r, z) = G\left\{\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial z} - \frac{k}{r}\varphi_{3k} + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k})\right]\right\}; \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\tau_{rz}^{(k)}(r, z) = G\left\{\frac{\partial\varphi_{3k}}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial z} - \right. \qquad (1.16)$$

$$\left. - \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}(r\varphi_{1k} + z\varphi_{3k} + \varphi_{0k})\right\}, \quad (k = 0, 1, 2\cdots).$$

Таким образом, задача свелась к определению трех, зависящих только от двух переменных, функций $\varphi_{ik}(r, z)$ $(i = 0, 1, 3)$, которые в области осевого сечения тела удовлетворяют уравнениям (1.12), а на контуре сечения заданы законом распределения напряжений и перемещений.

2. Рассмотрим задачу о деформации полупространства под действием жесткого круглого штампа, при отсутствии касательных напряжений под штампом. Такая задача была рассмотрена В. М. Абрамовым [4].

Пусть граничные условия заданы в виде

$$u_z\big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r)\cos k\varphi \quad (0 < r < R)$$

$$\sigma_r\big|_{z=0} = 0 \quad (r > R)$$

$$\tau_{rz}\big|_{z=0} = \tau_{z\varphi}\big|_{z=0} = 0 \quad (0 < r < \infty). \qquad (2.1)$$

Здесь $f_k(r)$ — не возрастающая в интервале $(0, R)$ и интегрируемая в этом интервале функция (случай, когда $f_1(r) = \gamma r$, $\gamma \equiv \text{cosnt.}$ и $f_k(r) = 0$ при $k \neq 1$ рассмотрен В. М. Абрамовым).

Для решения поставленной задачи достаточно положить

$$\varphi_{1k}(r, z) = 0,$$

$$\varphi_{3k}(r, z) = \int_0^{\infty} B(\lambda)\, e^{-\lambda z} J_k(\lambda r)\, d\lambda, \qquad (2.2)$$

$$\varphi_{0k}(r, z) = \int_0^{\infty} C(\lambda)\, e^{-\lambda z} J_k(\lambda r)\, d\lambda,$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента.

Вычисляя по формулам (1.14) — (1.16) величины $w_k(r, z)$, $\tau_{rz}^{(k)}(r, z)$, $\sigma_r^{(k)}(r, z)$, $\tau_{z\varphi}^{(k)}(r, z)$ и удовлетворяя условиям (2.1), получим

$$C(\lambda) = -(1-2\nu)\frac{B(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.3}$$

а также парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty B(\lambda) J_k(\lambda r) = 2 f_k(r) \quad (r < R)$$

$$\int_0^\infty \lambda B(\lambda) J_k(\lambda r)\, d\lambda = 0 \quad (r > R) \tag{2.4}$$

для определения коэффициента $B(\lambda)$. Переходя к безразмерным координатам

$$r = R\rho,\ \lambda = \frac{t}{R},\ \lambda B(\lambda) = RA(t),\ 2f_k(r) = Rg_k(\rho), \tag{2.5}$$

получим

$$\int_0^\infty t^\alpha A(t) J_k(\rho t)\, dt = g_k(\rho) \quad (\rho < 1)$$

$$\int_0^\infty A(t) J_k(\rho t)\, dt = 0 \qquad (\rho > 1) \tag{2.6}$$

где $\alpha = -1$.

Такие уравнения исследовались в работах Басбриджа ([5]) и Е. Титчмарша ([6]).

Решение этих уравнений имеет вид ([4, 5, 6])

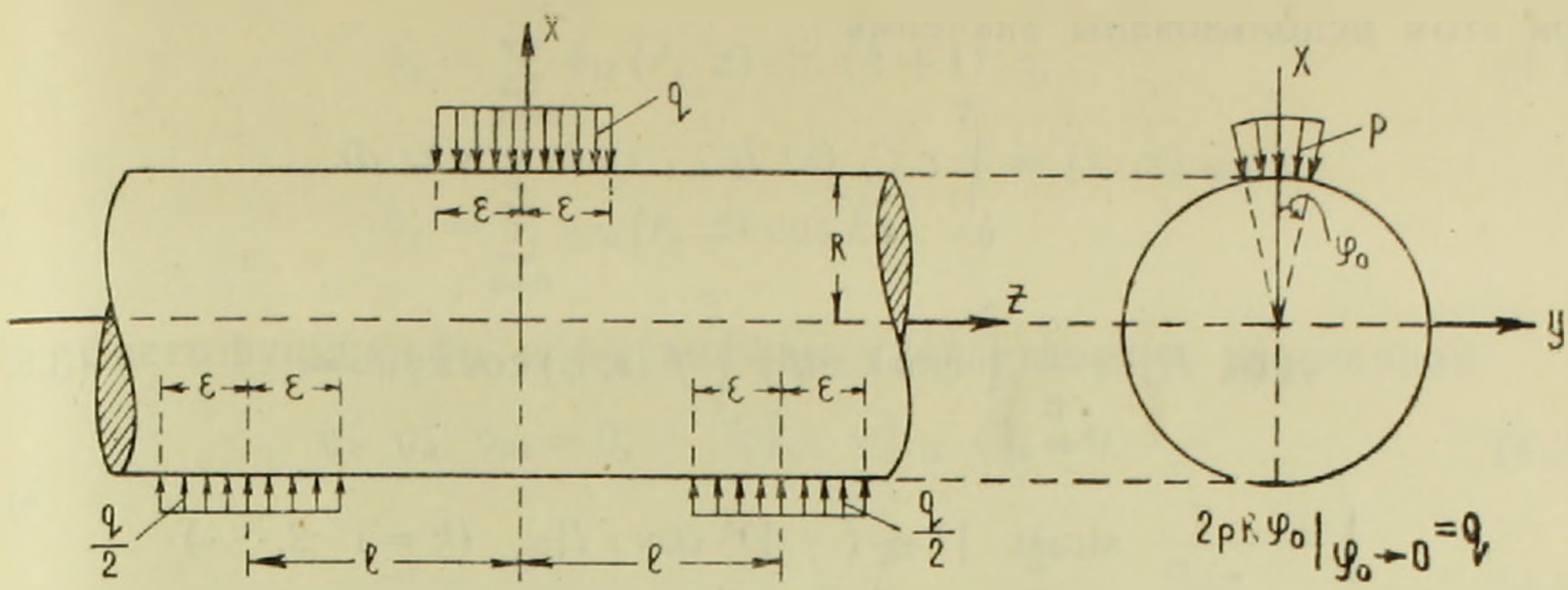
$$A(t) = \frac{(2t)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^1 \mu^{1+\frac{\alpha}{2}} J_{k+\frac{\alpha}{2}}(\mu t)\, d\mu \int_0^1 g_k(x\mu)\, x^{k+1} (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} dx. \tag{2.7}$$

Полагая, что $g_k(\rho) = \rho^k$ и положив $\alpha = -1$ будем иметь

$$A(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{2t}\; J_{k+\frac{1}{2}}(t). \tag{2.8}$$

Это решение приводится в работе В. М. Абрамова.

3. Рассмотрим задачу о деформации сплошного цилиндра бесконечной длины, изгибаемого силами, действующими на участках его боковой поверхности в направлении оси OX (фиг. 2).



Фиг. 2.

Нагрузку на боковой поверхности представим в виде

$$\sigma_r(R,\varphi,z)=f(z,\varphi);\ \tau_{rz}(R,\varphi,z)=\tau_{\varphi r}(R,\varphi,z)=0, \tag{3.1}$$

где

$$f(z,\varphi)=\begin{cases}-p\ (0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0;\ 0\leqslant z\leqslant\varepsilon)\\ -\dfrac{p}{2}\ (\pi-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\ l-\varepsilon\leqslant z\leqslant l+\varepsilon)\\ 0\ (\text{на остальной части бок. поверхности}).\end{cases} \tag{3.2}$$

Пользуемся также условиями симметрии

$$u_z(r,\varphi,0)=\tau_{rz}(r,\varphi,0)=\tau_{\varphi z}(r,\varphi,0)=0 \tag{3.3}$$

и представляем функции $\varphi_{ik}(r,z)$ $(i=0,1,3)$ в виде

$$\varphi_{1k}(r,z)=\int_0^\infty A_k(\lambda)\,I_{k+1}(\lambda r)\cos\lambda z\,d\lambda,$$

$$\varphi_{3k}(r,z)=\int_0^\infty C_k(\lambda)\,I_k(\lambda r)\sin\lambda z\,d\lambda, \tag{3.4}$$

$$\varphi_{0k}(r,z)=\int_0^\infty E_k(\lambda)\,I_k(\lambda r)\cos\lambda z\,d\lambda,$$

где $I_m(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Вычисляя величины $\sigma_r^{(k)}(r,z)$, $\tau_{rz}^{(k)}(r,z)$, $\tau_{r\varphi}^{(k)}(r,z)$ и удовлетворяя граничным условиям для определения неизвестных коэффициентов, получаем систему линейных уравнений

$$A_k(\lambda)\,a_k^{(1)}+C_k(\lambda)\,c_k^{(1)}+\lambda E_k(\lambda)\,e_k^{(1)}=\frac{4(1-\nu)}{\lambda\pi G}\,\psi_k(\lambda,R), \tag{3.5}$$

$$A_k(\lambda)\,a_k^{(2)}+C_k(\lambda)\,c_k^{(2)}+\lambda E_k(\lambda)\,e_k^{(2)}=0.$$

$$A_k(\lambda)\,a_k^{(3)}+C_k(\lambda)\,c_k^{(3)}+\lambda E_k(\lambda)\,e_k^{(3)}=0. \tag{3.5}$$

При этом использованы значения

$$z\,\varphi_{3k}(r,\ z)=\int_0^\infty r\,C_k(\lambda)\,I_{k+1}(\lambda r)\cos\lambda z\,d\lambda,$$

$$\psi_k(\lambda,\ R)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\lambda z\,dz\int_0^\pi f(z,\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi= \tag{3.6}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{q}{\pi\lambda R}\sin\lambda\varepsilon\,\left[1+(-1)^k\cos\lambda l\right] & (k=1,\ 2,\cdots)\\ -\dfrac{q}{2\pi\lambda R}\sin\lambda\varepsilon\,\left[1+\cos\lambda l\right], & (k=0)\end{cases}$$

$$q=2\,p\,R\,\varphi_0|_{\varepsilon_0\to 0},$$

а также обозначения

$$a_k^{(1)}=(3-2\nu)\,I_k(\lambda R)-\lambda R I_{k+1}(\lambda R)-(4-4\nu+k)(k+1)\frac{I_{k+1}(\lambda R)}{\lambda R},$$

$$c_k^{(1)}=-\left[(1-2\nu)\,I_k(\lambda R)+\lambda R I_{k+1}(\lambda R)+k\,(k+1)\,\frac{I_{k+1}(\lambda R)}{\lambda R}\right],$$

$$e_k^{(1)}=-\left[I_k(\lambda R)-\frac{I_{k+1}(\lambda R)}{\lambda R}+k\,(k-1)\,\frac{I_k(\lambda R)}{\lambda^2 R^2}\right],$$

$$a_k^{(2)}=\lambda R\,I_k(\lambda R)-(2-2\nu+k)\,I_{k+1}(\lambda R),$$

$$c_k^{(2)}=\lambda R\,I_k(\lambda R)+(2-2\nu-k)\,I_{k+1}(\lambda R)+2\,(1-\nu)\,\frac{kI_k(\lambda R)}{\lambda R}, \tag{3.7}$$

$$e_k^{(2)}=I_{k+1}(\lambda R)+\frac{k\,I_k(\lambda R)}{\lambda R},$$

$$a_k^{(3)}=(2-2\nu+k)\,I_k(\lambda R)-(4-4\nu+k)\,(k+1)\,\frac{I_{k+1}(\lambda R)}{\lambda R},$$

$$c_k^{(3)}=k\,I_k(\lambda R)-\frac{k\,(k+1)\,I_{k+1}(\lambda R)}{\lambda R},$$

$$e_k^{(3)}=\frac{k}{\lambda R}\left[I_{k+1}(\lambda R)+\frac{(k-1)\,I_k(\lambda R)}{\lambda R}\right],$$

то есть решение задачи свелось к решению системы трех уравнений (3.5).

4. Заметим также, что задача о симметричной относительно плоскости XOZ (фиг. 1) деформации тела вращения может быть решена и при помощи бигармонических функций $\psi_i(r,\ \varphi,\ z)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ Б. Г. Галеркина (7), если эти функции брать в форме

$$\psi_1=\sum_{k=0}^\infty\psi_{1k}(r,\ z)\cos(k+1)\varphi,$$

$$\psi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{1k}(r,\ z) \sin (k+1)\ \varphi, \tag{4.1}$$

$$\psi_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{3k}(r,\ z) \cos k\varphi\ .$$

Здесь функции ψ_{1k} и ψ_{3k} должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla_k^2\ \nabla_k^2\ \psi_{3k} = 0, \qquad \nabla_{k+1}^2\ \nabla_{k+1}^2\ \psi_{1k} = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\nabla_\alpha^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\alpha^2}{r^2}\ . \tag{4.3}$$

Если деформация тела является симметричной относительно оси OZ, тогда, оставляя в разложениях (4.1) только первые члены и положив $\psi_{10}(r,\ z) = 0$, мы убедимся, что при наличии осевой симметрии из трех функций Б. Г. Галеркина остается только функция $\psi_3 = \psi_{30}(r,\ z)$, которая совпадает с функцией А. Лява ([8]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Առաձգականության տեսության որոշ տարածական խնդիրների լուծման մի եղանակի մասին

Աշխատանքում առաձգականության տեսության որոշ տարածական խնդիրների լուծման համար օգտագործվում են Պ. Ֆ. Պապկովիչի [1] ֆունկցիաները։

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ պտտման մարմնի դեֆորմացիաները սիմետրիկ են մարմնի առանցքային հատվածքներից մեկի հարթության նկատմամբ։

Ստացված են միայն r և z փոփոխականները պարունակող բանաձևերը։

Որպես օրինակ բերվում է Վ. Մ. Աբրամովի [4] կողմից դիտարկված կոնտակտային խնդրի լուծումը։ Բերվում է նաև կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված ոչ սիմետրիկ բեռով ծռվող անվերջ երկար կլոր գլանի խնդրի լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. Ф. Папкович*, Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции, Известия АН СССР, ОМЕН, 1932, 1425—1435. [2] *П. Ф. Папкович*, Теория упругости, Оборонгиз, 1939, стр. 159—161. [3] *К. В. Соляник-Красса*, ДАН СССР, том 114 (1957), № 1, 49—52. [4] *В. М. Абрамов*, ДАН СССР, том 23, (1939), № 8, 759—763. [5] *Басбридж* (Busbridge I. M.), Dual integral equations, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 1938, 115—129. [6] *Е. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат. М., 1948. [7] *Б. Г. Галеркин*, Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле при помощи трех функций, Известия НИИГ 1931, том 1, 49—56; см. также Собрания трудов Изд. АН СССР, 1952, том 1, 328—334. [8] *А. Ляв*, Математическая теория упругости, ОНТИ. М.—Л., 1935, стр. 228.