ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXV 1962 3

МАТЕМАТИКА

С. О. Синанян

Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 20/VI 1962)

Начнем с определений и обозначений.

1. *Определение 1.* Пусть F замкнутое ограниченное множество на комплексной плоскости. Рассмотрим класс функций A_F, аналитических вне F, не превосходящих по модулю единицу и имеющих вблизи $z=\infty$ разложение вида

$$\mu(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots.$$

Число

$$\gamma(F)=\sup_{\mu\in A_F}|a_1|$$

называется мерой Альфорса или аналитической емкостью множества F ([1]).

Функцию $\gamma(F)$ можно определить на любом множестве e, полагая $\gamma(e)=\sup\gamma(F)$ в классе всех замкнутых множеств F, принадлежащих e.

Определение 2. Пусть F опять замкнутое ограниченное множество на комплексной плоскости. Через A_F^p обозначим множество аналитических вне F функций, исчезающих в бесконечности и удовлетворяющих условию:

$$\sup\left\{\frac{1}{m(K-F)}\iint\limits_{K-F}|f(z)|^p\,dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant 1,$$

где верхняя грань берется по всевозможным кругам K (открытым), которые содержат F.

Величину

$$\gamma_p(F)=\sup_{f\in A_F^p}|a_1(f)|;\ p\geqslant 1,$$

где $a_1(f)$ коэффициент в разложении

$$f(z) = \frac{a_1(f)}{z} + \frac{a_2(f)}{z^2} + \cdots,$$

назовем p — мерой Альфорса или аналитической p-емкостью.

Определим функцию $\gamma_p(F)$ на любом множестве e, полагая $\gamma_p(e) = \sup \gamma_p(F)$ в классе всех замкнутых множеств F, принадлежащих e.

Отметим несколько свойств p — меры Альфорса.

а) $\gamma_p(F) \geqslant \gamma(F)$, $\quad p \geqslant 1$;

б) $\gamma_{p'}(F) \geqslant \gamma_p(F)$, $\quad 1 \leqslant p' < p$;

в) $\gamma_p(K) = r$ для круга радиуса r, $p \geqslant 2$;

г) p — мера Альфорса любого замкнутого множества, которое принадлежит кругу радиуса r, не превосходит $27\ r$;

д) пусть E произвольное, нигде не плотное замкнутое множество; для любого круга K

$$\gamma_p(K \cap CE) \geqslant 2^{-\frac{1}{p}}\gamma_p(K),\ 1 \leqslant p < 2;$$

е) для любого числа $N > 0$ можно указать такое замкнутое множество F, что $\gamma_p(F) \geqslant N \cdot \gamma(F)$
при любом $p \geqslant 1$.

Это свойство показывает, что p — мера Альфорса—существенно отличается от обычной меры Альфорса и, вообще говоря, превосходит ее.

Определение 3. Ограниченная односвязная область называется областью типа Каратеодори, если в любой окрестности каждой граничной точки содержится часть из бесконечной дополнительной области [2].

Определение 4. Открытое ограниченное множество назовем открытым множеством типа Каратеодори, если в любой окрестности каждой его граничной точки содержится часть из бесконечной дополнительной области.

Определение 5. Ограниченное замкнутое множество назовем замкнутым множеством Каратеодори, если в любой окрестности каждой его граничной точки содержится часть из бесконечной дополнительной области.

В работе рассматриваются только такие замкнутые множества, любая порция которых имеет положительную плоскую меру. Такие множества называются приведенные по мере.

Пусть F замкнутое ограниченное множество. Через $L_p(F)$, $p \geqslant 1$, обозначим Банахово пространство, состоящее из функций $f(z)$, определенных на F, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \left(\iint_F |f(z)|^p\, dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Подпространство этого пространства, состоящее из аналитических во внутренних точках множества F функций, обозначим через $H_p(F)$, $p \geqslant 1$.

Определим также Банахово пространство $H_p^{\Delta}(F)$, $p \geqslant 1$, состоящее из определенных на F действительных функций $u(z)$, которые гармоничны во внутренних точках F и для которых норма $\|u\|_p$ конечна.

Для доказательства первых четырех теорем используется обобщенная формула Коши и следующие леммы.

Лемма 1. Пусть замкнутое множество E такое, что в любом круге радиуса $\delta > 0$ содержится замкнутое множество F, принадлежащее к дополнению E, такое, что $\gamma_p(F) > \lambda \cdot \delta$, $p \geqslant 1$, где $\lambda > 0$ не зависит от F.

Тогда существует функция $S_\zeta(z)$, определенная по обеим переменным в некотором открытом множестве Ω, $E \subset \Omega$, аналитическая там по переменному z, и такая, что среди всех $S_\zeta(z)$, $\zeta \in E$, имеется лишь конечное число различных функций. Эта функция удовлетворяет неравенствам:

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - S_\zeta(z)\right| < c_1 \frac{\delta}{|\zeta - z|^2}, \ \zeta \in E, \ |\zeta - z| \geqslant 4\delta,$$

$$\left|\iint\limits_E \Bigg(\iint\limits_{\substack{\zeta \in E \\ |\zeta - z| < 4\delta}} |S_\zeta(z)|\, d\xi\, d\eta \Bigg)^p dx\,dy\right|^{\frac{1}{p}} < c_2 \cdot \delta, \ \zeta = \xi + i\eta,$$

где c_1 и c_2 постоянные, зависящие лишь от λ.

Лемма 2. Если в условиях леммы 1 потребовать, чтобы $\gamma_{2p}(F) > \lambda \cdot \delta$, то, кроме всех утверждений относительно функции $S_\zeta(z)$, имеет место также неравенство:

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - S_\zeta(z)\right| < c_3 \frac{\delta^2}{|\zeta - z|^3}, \ \zeta \in E, \ |\zeta - z| \geqslant 4\delta,$$

где c_3 постоянное, зависящее лишь от λ.

Теорема 1. *Пусть F — замкнутое множество Каратеодори. Тогда множество алгебраических полиномов всюду плотно в пространстве $H_p(F)$, $p \geqslant 1$.*

Частным случаем этой теоремы является теорема Маркушевича—Фареля, доказанная для областей типа Каратеодори ([1]).

Теорема 2. *Пусть опять F замкнутое множество Каратеодори. Тогда любую функцию в пространстве $H_p^{\Delta}(F)$ можно приближать гармоническими полиномами, $p \geqslant 1$.*

В качестве нерешенной задачи вопрос о возможности приближения в среднем по площади гармонических функций гармоническими полиномами в Каратеодоровых областях предлагается в монографии А. Л. Шагиняна ([3]).

Теорема 3. *Предположим, что замкнутое ограниченное множество F такое, что в каждом круге любого радиуса $\delta>0$ с центром в граничных точках множества F находится замкнутое множество e такое, что*

$$\gamma_{2p}(e)>\lambda\cdot\delta,\ e\in CF,\ p\geq 1,$$

где $\lambda>0$ абсолютное постоянное.

При этих условиях множество аналитических на F функций всюду плотно в пространстве $H_p(F)$, $p\geq 1$.

Из этой теоремы получаются следствия:

Следствие 1. Если в условиях теоремы потребовать, чтобы $\gamma(e)>\lambda\cdot\delta$, где $\lambda>0$ абсолютное постоянное, то множество аналитических на F функций окажется всюду плотным в пространстве $H_p(F)$, $p\geq 1$.

Следствие 2. Если замкнутое ограниченное множество F такое, что дополнение к нему состоит из конечного числа областей, то опять любую функцию в пространстве $H_p(F)$, $p\geq 1$, можно приближать аналитическими на F функциями.

Теорема 1, 2 и следствия 1, 2 можно получить используя, вместо вышеприведенных лемм, оценки ядра Коши в равномерной метрике ([4]).

Теорема 4. *Пусть замкнутое ограниченное множество F такое, что в каждом круге любого радиуса δ с центром в граничных точках этого множества находится такое замкнутое множество e, принадлежащее к дополнению F, что*

$$\gamma_p(e)>\lambda\cdot\delta,$$

где $\lambda>0$ *абсолютное постоянное.*

Тогда любую функцию $f(z)$, у которой средний модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\omega_p(\delta,f)=0\ (\log\delta);$$

в пространстве $H_p(F)$, $p\geq 1$, можно приближать аналитическими на F функциями.

Теорема 5. *При $1<p<2$ любую функцию в пространстве $L_p(E)$ можно приближать рациональными функциями. Здесь E произвольное ограниченное множество.*

2°. Пусть E замкнутое, ограниченное и нигде не плотное множество.

Ставится вопрос о полноте множества аналитических на E функций в пространстве $L_p(F)$, $p\geq 1$.

При $1<p<2$ ответ дает следующая теорема:

Теорема 6. *Множество аналитических на E функций всюду плотно в пространстве $L_p(E)$ при любом $1<p<2$.*

Построен пример нигде не плотного ограниченного замкнутого множества E_0, для которого в любом $L_p(E)$, $p\geq 2$, нет полноты.

При $p \geqslant 2$ вопрос решается следующей теоремой:

Теорема 7. *Для того, чтобы множество аналитических на E функций было всюду плотным в пространстве $L_p(E)$, $p \geqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы для любого круга K:*

$$\gamma_p(K \cap CE) \geqslant 2^{-\frac{1}{p}} \delta,$$

где $\delta > 0$ радиус круга K.

Заметим, что эта теорема по формулировке близка к теореме А. Г. Витушкина ([5]) о приближении непрерывных функций аналитическими на нигде не плотных замкнутых множествах в равномерной метрике, если эту теорему сформулировать в следующем эквивалентном виде:

Теорема А. Г. Витушкина. *Для того, чтобы на нигде не плотном замкнутом множестве E любую непрерывную на этом множестве функцию было бы возможно равномерно аппроксимировать аналитическими на этом множестве функциями, необходимо и достаточно, чтоды для произвольного круга K*

$$\gamma(K \cap \text{ц}E) \geqslant \delta,$$

где $\delta > 0$ радиус круга K.

В связи с теоремой 7 и теоремой А. Г. Витушкина приведем следующее утверждение.

Теорема 8. *Существует такое, нигде не плотное, ограниченное, замкнутое множество E, на котором не все непрерывные функции можно равномерно приближать аналитическими на E функциями, в то время как множество аналитических на E функций всюду плотно в любом пространстве $L_p(E)$, $p \geqslant 1$.*

В конце хочется отметить большое влияние работ С. Н. Мергеляна по вопросам приближения аналитическими функциями при выполнении настоящей работы. При доказательстве теоремы 7 также оказывается очень полезной теорема А. Г. Витушкина о приближении на нигде не плотных замкнутых множествах.

Мне приятно воспользоваться возможностью выразить благодарность академику АН Армянской ССР С. Н. Мергеляну за советы и постоянное внимание к данной работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ս. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ

Միջին մակերեսային մոտավորություններ անալիտիկ ֆունկցիաներով և բազմանդամներով

Դիտարկվում են միջին մակերեսային իմաստով բազմանդամներով և ռացիոնալ ֆունկցիաներով մոտարկման հարցեր: Ապացուցվում է, որ Կարաթեոդորյան տիպի փակ բազմությունների վրա միշտ հնարավոր է այդ բազմության ներքին կետերում անա-

լիտիկ և եզրում կամայական (ինտեգրելի) ֆունկցիաները մոտարկել բազմանդամներով: Նույնպիսի արդյունք է ստացվում հարմոնիկ ֆունկցիաները հարմոնիկ բազմանդամներով մոտարկելու հարցում: Բերվում են ռացիոնալ կոտորակներով մոտարկելու բավարար հայտանիշներ: Տրվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման ամենուրեք նոսր փակ բազմության վրա, որի դեպքում ցանկացած ֆունկցիա $Lp(E)$, $p \geqslant 1$, տարածությունում հնարավոր է մոտարկել այդ բազմության վրա անալիտիկ ֆունկցիաներով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. Л. Уолш*, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Изд. лит. М., 1961. [2] *А. Н. Маркушевич*, Теория аналитических функций, М.—Л., 1950. [3]. *А. Л. Шагинян*, Теория приближения в комплексной области, Ереван, 1960. [4] *С. Н. Мергелян*, Равномерное приближение функций комплесного переменного, УМН, 7:2 (48), 31—122. [5] *А. Г. Витушкин*, ДАН СССР, 128, № 1 (1959), 17—20.