ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXV 1962 3

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, академик АН Армянской ССР

О пополнении одной неполной системы

(Представлено 20/VI 1962)

В заметке автора (1) были намечены доказательства ряда предложений о пополнении и характеристике замкнутой линейной оболочки неполных систем вида $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ в $L_2(0,+\infty)$.

Доказательство основной теоремы (теорема 2) заметки (1) опиралось на одну общую теорему автора (2), обобщающую известную теорему С. Бохнера об аналитической характеристике унитарных операторов в L_2.

В настоящей заметке мы ставим себе целью дополнить результат теоремы 2 нашей заметки (1), при этом, пользуясь случаем, приводим еще два прямых доказательства этой теоремы, которые не опираются на понятия функционального анализа*.

Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\mu_k>0$) — произвольная последовательность комплексных чисел $s_k\geq 1$ означает кратность появления числа μ_k в группе $\{\mu_1,\cdots,\mu_k\}$.

Последовательности чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ поставим в соответствие последовательность функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$, $e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\in L_2(0,+\infty)$ и, наконец, через $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ обозначим соответствующую ортогонализованную систему.

Функции системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ представим в интегральной форме**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\mu_n}{\pi}}\,\frac{i}{t+i\mu_n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{t-i\bar{\mu}_k}{t+i\mu_k}\,e^{-ixt}\,dt=\begin{cases}\gamma_n(x), & x\in(0,+\infty)\\ 0, & x\in(-\infty,0)\end{cases} \tag{1}$$

* В сущности эти доказательства были найдены мною раньше, чем доказательство, приведенное в заметке (1). Более того, они легли в основу идеи обобщения теоремы Бохнера, сформулированной в (2). Намеченное в первой заметке доказательство теоремы 2 имело целью лишь проиллюстрировать применение установленной во второй заметке обобщенной теоремы Бохнера.

** Библиографические примечания об ортогональной системе $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ приведены в нашей заметке (3).

Заметим, что последовательность комплексных чисел $\{i\bar{\mu}_k\}$ ($\operatorname{Im}(i\bar{\mu}_k)=\operatorname{Re}\mu_k>0$) лежит уже в верхней полуплоскости $G^{(+)}$ ($\operatorname{Im} z>0$). Повсюду в дальнейшем, полагая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\mu_k}{1+|\lambda_k|^2}<+\infty, \tag{2}$$

введем в рассмотрение сходящееся произведение Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-i\bar{\mu}_k}{z+i\mu_k}\nu_k, \qquad \nu_k=\frac{1-\mu_k}{1+\mu_k}\left|\frac{1+\bar{\mu}_k}{1-\mu_k}\right| \tag{3}$$

и ядра

$$K(\xi, x)=\frac{1}{2\pi i}\, l\cdot i\cdot m\cdot_{\sigma\to\infty}\int_{-\sigma}^{\sigma}\overline{B(u)}\,\frac{e^{i\xi u}-1}{iu}\,e^{-ixu}\,du, \tag{4}$$

$$K^*(\xi, x)=\frac{1}{2\pi}\, l\cdot i\cdot m\cdot_{\sigma\to\infty}\int_{-\sigma}^{\sigma}B(u)\,\frac{e^{i\xi u}-1}{iu}\,e^{-ixu}\,du, \tag{5}$$

принадлежащие $L_2(-\infty, +\infty)$ при любом $\xi\neq 0$, $\xi\in(-\infty, +\infty)$.

Применяя равенства Парсеваля для преобразований Фурье из (1) и (5), легко получим, что

$$\int_0^{\infty}\overline{K^*(\xi, x)}\gamma_n(x)\,dx=0 \quad (n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема а) *Пусть функция $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ произвольна, тогда справедливо представление*

$$\int_0^{\xi}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_0^{\xi}\gamma_k(t)\,dt+\int_0^{\infty}\overline{K(\xi, x)}\,g(x)\,dx, \quad \xi\in[0,\infty) \tag{7}$$

где $g(x)\in L_2(0,+\infty)$ и

$$\int_0^{\xi}g(x)\,dx=\int_0^{\infty}\overline{K^*(\xi, x)}\,f(x)\,dx, \quad \xi\in[0,\infty), \tag{8}$$

$$c_k=\int_0^{\infty}f(x)\,\overline{\gamma_k(x)}\,dx \qquad (k=1,2,\cdots), \tag{9}$$

причем справедливо также равенство

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2+\int_0^{\infty}|g(x)|^2\,dx \tag{10}$$

б) *Обратно, если последовательность комплексных чисел* $\{c_k\}_1^\infty$ *такова, что* $\sum\limits_0^\infty |c_k|^2 < +\infty$ *и* $g(x) \in L_2(0, +\infty)$, *то формула* (7) *определяет некоторую функцию* $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, *причем соотношения* (8), (9) *и* (10) *остаются в силе.*

Докажем сначала утверждение б) теоремы, а затем наметим два доказательства утверждения а).

Если $\sum\limits_1^\infty |c_k|^2 < +\infty$, то по теореме Рисса-Фишера формула

$$\int_0^\xi f_1(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty c_k \int_0^\xi \gamma_k(t)\,dt, \quad \xi \in [0, +\infty) \tag{11}$$

определяет некоторую функцию $f_1(x) \in L_2(0, +\infty)$, причем ряд в правой части сходится абсолютно. Очевидно при этом, что будем иметь

$$c_k = \int_0^\infty f_1(x)\,\overline{\gamma_k(x)}\,dx, \quad (k = 1, 2 \cdots),$$

и

$$\int_0^\infty |f_1(x)|^2\,dx = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2. \tag{12}$$

Далее, если $g(x) \in L_2(0, +\infty)$, то функция

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ixw} g(x)\,dx, \quad w \in G^{(+)}, \tag{13}$$

голоморфна в полуплоскости $G^{(+)}$, ($\operatorname{Im} w > 0$) и принадлежит классу $H_2^{(+)}$ *, при этом

$$\int_0^\infty |g(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty |G(u)|^2\,du, \tag{14}$$

где $G(u)$ суть граничные значения функции $G(w)$, которые почти для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ определяются формулой

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int_0^\infty \frac{e^{iux} - 1}{ix} g(x)\,dx. \tag{15}$$

Функция $G(w)\,B(w)$ также принадлежит классу $H_2^{(+)}$, поэтому будем иметь

---

* Мы пользуемся обозначениями нашей заметки ([4]).

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} B(u)\,G(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du = \begin{cases} f_2(x) \in L_2(0,\infty),\ x \in (0,\infty), \\ 0,\ x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{16}$$

причем

$$\int_0^{\infty} |f_2(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |G(u)|^2 du, \tag{17}$$

ввиду того, что $|B(u)| = 1$ почти всюду на всей оси $(\infty, +\infty)$.

Наконец, так как по (15)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux}-1}{-iu}\,G(u)\,du = \begin{cases} g(x),\ x \in (0, +\infty) \\ 0,\ x \in (-\infty, 0), \end{cases} \tag{15'}$$

то, пользуясь определением (4) ядра $K(\xi, x)$ и равенством Парсеваля, получим

$$\int_0^{\infty} \overline{K(\xi, x)}\,g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B(u)\,\frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}\,G(u)\,du =$$

$$= \int_0^{\xi} f_2(x)\,dx,\quad \xi \in [0, \infty).$$

Итак, формула

$$\int_0^{\xi} f_2(x)dx = \int_0^{\infty} \overline{K(\xi, x)}\ g(x)\,dx,\quad \xi \in [0, \infty) \tag{18}$$

определяет функцию $f_2(x) \in L_2(0, +\infty)$, причем по (14) и (17)

$$\int_0^{\infty} |f_2(x)|^2\,dx = \int_0^{\infty} |g(x)|^2\,dx. \tag{19}$$

Преобразование (18) обращается посредством формулы

$$\int_0^{\xi} g(x)\,dx = \int_0^{\infty} \overline{K^*(\xi, x)}\,f_2(x)\,dx, \tag{20}$$

так как из определения (5) ядра $K^*(\xi, x)$ и ввиду (16) по равенству Парсеваля получим

$$\int_0^{\infty} \overline{K^*(\xi, x)} f_2(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\overline{B(u)\frac{e^{i\xi u}-1}{iu}}\right\}\left\{B(u)\,G(u)\right\}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}\,G(u)\,du = \int_0^{\xi} g(x)dx,$$

если учтем также формулу (15').

Из (11) и (18) вытекает, что формула (7) определяет функцию

$$f(x) = f_2(x) + f_2(x) \in L_2(0, +\infty)$$

и поэтому ввиду (12) и (19) для завершения доказательства утверждения б) достаточно установить справедливость формул

$$\int_0^\infty \overline{f_1(x)}\, f_2(x)\, dx = 0, \quad \int_0^\infty f_2(x)\, \overline{\gamma_k(x)}\, dx = 0 \quad (k = 1, 2 \cdots) \tag{21}$$

$$\int_0^\infty \overline{K^*(\xi, x)}\, f_1(x)\, dx = 0. \tag{22}$$

Что касается формулы (22), то она непосредственно следует из свойства (6), если иметь в виду, что по определению (11) функции $f_1(x)$

$$f_1(x) = \underset{n \to \infty}{l \cdot i \cdot m} \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_k(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

По той же причине имеем

$$\int_0^\infty f_2(x) \overline{f_1(x)}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \int_0^\infty f_2(x)\, \overline{\gamma_n(x)}\, dx,$$

и поэтому достаточно установить лишь второе из равенств (21).

Однако, в силу (1) и (6), по равенству Парсеваля

$$\int_0^\infty f_2(x) \overline{\gamma_n(x)}\, dx = -i \sqrt{\frac{\operatorname{Re}\mu_n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - i\mu_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u + i\bar{\mu}_k}{u - i\mu_k} B(u) G(u) du,$$

причем при любом $n \geqslant 1$*.

$$\Omega_n(w) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{w + i\bar{\mu}_k}{w - i\mu_k}\, B(w)\, G(w) \in H_2^{(+)}, \quad \Omega_n(i\bar{\mu}_n) = 0$$

Итак,

$$\int_0^\infty f_2(x)\, \overline{\gamma_n(x)}\, dx = -i \sqrt{\frac{\operatorname{Re}\mu_n}{\pi}}\, 2\pi i\, \Omega_n(i\bar{\mu}_n) = 0 \quad (n = 1, 2 \cdots).$$

Перейдем теперь к доказательству утверждения а).

Доказательство первое. Пусть $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, тогда, определив коэффициенты $\{c_k\}_1^\infty$ по формулам (9) и обозначив

$$f_1(x) = \underset{n \to \infty}{l \cdot i \cdot m} \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k\, \gamma_k(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{23}$$

---

* При $n = 1$ символ $\prod_{k=1}^{n-1}$ заменяется единицей.

из (6), имеем

$$\int_0^\infty \overline{K^*(\xi, x)}\ f_1(x)\,dx = 0,\ \xi \in [0, \infty).$$

Поэтому, положив

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x) \in L_2(0, +\infty), \tag{24}$$

получим

$$\int_0^\infty \overline{K^*(\xi, x)}\, f(x)\,dx = \int_0^\infty \overline{K^*(\xi, x)}\, f_2(x)\,dx, \tag{25}$$

причем очевидно также, что

$$\int_0^\infty f_2(x)\,\overline{\gamma_n(x)}\,dx = c_n - c_n = 0 \quad (n = 1, 2 \cdots). \tag{26}$$

Однако $\gamma_n(x)$ есть линейная комбинация системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k - 1}\}_1^n$. Поэтому равенства (26) эквивалентны следующим

$$\int_0^\infty f_2(x)\,\overline{\{e^{-\mu_k x}\ x^{s_k - 1}\}}\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{27}$$

Рассматривая функцию

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_2(x) e^{ixw}\,dx \in H_2^{(+)}, \tag{28}$$

из (27) получим

$$F^{(s_k)}(i\mu_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

откуда следует, что функция

$$G(w) = \frac{F(w)}{B(w)} \tag{29}$$

также принадлежит классу $H_2^{(+)}$. Из (28) и (29) следует

$$\int_0^\xi f_2(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty B(u)\, G(u)\ \frac{e^{-i\xi u} - 1}{-iu}\,du,$$

и если обозначить

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^\infty G(u)\,\frac{e^{-ixu} - 1}{-iu}\,du \in L_2(0, +\infty),$$

то, пользуясь равенством Парсеваля, получим

$$\int_0^\xi f_2(x)\,dx = \int_0^\infty \overline{K(\xi, x)}\, g(x)\,dx,\ \xi \in [0, \infty). \tag{30}$$

Но выше было уже показано, что преобразование (30) обращается формулой

$$\int_0^{\xi} g(x)\,dx = \int_0^{\infty} \overline{K^*(\xi, x)}\, f_2(x)\,dx$$

или, в силу (25), формулой

$$\int_0^{\xi} g(x)dx = \int_0^{\infty} \overline{K^*(\xi, x)}\, f(x)dx,\ \xi \in [0, \infty). \tag{31}$$

Из (24), (23) и (30) следует требуемое представление (7) теоремы, а из (26), (30) и (31) следуют формулы (8) и (9). Наконец, равенство (10) вытекает уже из самого представления (7), как это было уже установлено выше.

Доказательство второе. Если $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, то, вводя в рассмотрение функцию

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{ixw} f(x)\,dx \in H_2^{(+)}, \tag{32}$$

имеем

$$\int_0^{\xi} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi u} - 1}{-iu} F(u)\,du,\ \xi \in [0, +\infty) \tag{32'}$$

Применим к функции $F(w)$ результат теоремы 2 заметки([4]), положив $\lambda_k = i\bar{\mu}_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, тогда ввиду условия (2) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < +\infty. \tag{2'}$$

Итак, согласно указанной теореме, почти для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ справедливо представление

$$F(u) = \frac{d}{du} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} G_k(F) \int_0^u \Phi_k(t)\,dt \right\} +$$

$$+ \frac{B(u)}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int_0^{\infty} \frac{e^{iut} - 1}{it} g(t)\,dt \equiv F_1(u) + F_2(u), \tag{33}$$

где

$$\Phi_n(w) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re}\mu_n}}{w + i\mu_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{w - i\bar{\mu}_k}{w + i\mu_k}\quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{34}$$

является системой Мальмквиста для всей оси $(-\infty, +\infty)$, ортонормальной с весом $\frac{1}{\pi}\,du$*

---

* Подробнее об этой системе см. заметку ([4]).

$$a_k(F)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\,\overline{\Phi_k(t)}\,dt\,(k=1,2,\cdots),\tag{35}$$

$$\int_0^{\xi}g(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi t}-1}{-it}\,\overline{B(t)}\,F(t)\,dt,\tag{36}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(u)|^2\,du=\pi\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(F)|^2+\int_0^{\infty}|g(v)|^2dv.\tag{37}$$

Кроме того, $F_1(w)\in R_2\{-i\mu_k\}$*, $F_2(w)\in H_2^{(+)}$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)\,\overline{F_2(u)}\,du=0.\tag{38}$$

Заметим теперь, что ввиду (34) формулу (1) можно записать в виде

$$\int_0^{\xi}\gamma_k(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi t}-1}{-it}\overline{\left\{\frac{i\Phi_n(t)}{\sqrt{\pi}}\right\}}\,dt,\tag{1'}$$

и поэтому, по равенству Парсеваля,

$$-i\sqrt{\pi}\,a_k(F)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\overline{\left\{\frac{i\Phi_k(t)}{\sqrt{\pi}}\right\}}\,dt=\int_0^{\infty}f(x)\,\overline{\gamma_k(x)}\,dx=c_k$$
$$(k=1,2,\cdots,).\tag{39}$$

Далее, из (36) и (5) по равенству Парсеваля получим

$$\int_0^{\xi}g(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left\{B(u)\frac{e^{i\xi u}-1}{iu}\right\}}\,F(u)\,du=$$

$$=\int_0^{\infty}\overline{K^*(\xi,x)}\,f(x)\,dx,\ \xi\in[0,\infty),\tag{40}$$

а из определения (33) функции $F_2(u)$ ввиду (4) следует

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}F_2(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left\{\frac{e^{i\xi u}-1}{iu}B(u)\right\}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{du}\int_0^{\infty}\frac{e^{ixu}-1}{ix}g(x)\,dx\right\}du=\int_0^{\infty}\overline{K(\xi,x)}\,g(x)\,dx\tag{41}$$

* Определение этого класса приведено в заметке [4].

Наконец, по (33), (1′) и (35)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu} F_1(u)\, du = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu} \overline{\left\{\frac{i\Phi_k(u)}{\sqrt{\pi}}\right\}} du =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{\xi} \gamma_k(t)\, dt, \ \xi \in [0, \infty). \tag{42}$$

Заметив теперь, что по (32′) и (33)

$$\int_0^{\xi} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu} F_1(u)\, du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu} F_2(u)\, du,$$

из (40) и (42) получим представление (7) теоремы. Наконец, если учесть, что по (32′)

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\, du,$$

то из (37) и (35) следует также равенство (10); формулы же (8) и (9) уже установлены. Этим и завершается второе доказательство.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Մի ոչ լրիվ սիստեմի լրիվացման մասին

Ներկա հոդվածում մենք լրացնում ենք մեր աշխատանքի (1) 2-րդ թեորեմի արդյունքը և օգտվելով առիթից բերում ենք այդ թեորեմի ևս երկու ապացույց: Այդ ապացույցները ի տարբերություն արդեն հրապարակվածի, չեն հենվում ֆունկցիոնալ անալիզի հասկացողությունների վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 3 (1961). [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 2 (1961). [3] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 35, № 1 (1962). [4] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 35 № 2 (1962).