ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXV 1962 2

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, академик АН Армянской ССР

О пополнении неполной системы Мальмквиста на вещественной оси

(Представлено 18/VI 1962)

Для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ($|\alpha_k|<1$) Мальмквистом ([1,2]) была построена система рациональных функций

$$\varphi_0(z)=\frac{(1-|\alpha_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\bar{\alpha}_0 z},\qquad \varphi_n(z)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\tag{1}$$

с полюсами, лежащими в точках последовательности $\left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right\}_0^\infty\left(\left|\frac{1}{\alpha_k}\right|>1\right)$, которая ортонормальна на единичной окружности в смысле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\,|dz|=\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}\tag{2}$$

Как хорошо известно ([2]), условие

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty\tag{3}$$

необходимо и достаточно для полноты системы Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ в классе функций H_2 Рисса.

В случае же, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty,\tag{4}$$

Уолшем ([2]) было получено эффективное пополнение неполной системы $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$.

Им было установлено, что при условии (4) для произвольной функции $f(s)\in H_2$ справедлива формула

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}, \quad (|z|<1) \tag{5}$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} f(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt| \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

а

$$B(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \tag{7}$$

—сходящееся произведение Бляшке.

В данной заметке приводится аналог формулы (5) Уолша для функций, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и принадлежащих там классу $H_2^{(+)}$ Рисса-Тамаркина.

1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ $(\operatorname{Im}\lambda_k>0)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, тогда отображением $z=(w-i)(w+i)^{-1}$ полуплоскости $G^{(+)}$ $(\operatorname{Im} w>0)$ на круг $|z|<1$ система (1), где $\alpha_k=\frac{\lambda_{k+1}-i}{\lambda_{k+1}+i}$, перейдет в систему рациональных функций Мальмквиста

$$\Phi_n(w)=\frac{\sqrt{\operatorname{Im}\lambda_n}}{w-\bar{\lambda}_n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{w-\lambda_k}{w-\bar{\lambda}_k} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1'}$$

с полюсами $\{\bar{\lambda}_k\}_1^{\infty}$, лежащими в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ $(\operatorname{Im} w<0)$, ортонормальную на всей оси в смысле*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(u)\,\overline{\Phi_m(u)}\,du=\delta_{nm}. \tag{2'}$$

Обозначим далее

$$B_n(w)=\prod_{k=1}^{n}\frac{w-\lambda_k}{w-\bar{\lambda}_k}\varkappa_k, \quad \varkappa_k=\frac{\bar{\lambda}_k+i}{\lambda_k+i}\left|\frac{\lambda_k+i}{\bar{\lambda}_k+i}\right|,$$

условившись в случае

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}<+\infty \tag{4'}$$

включать в это обозначение также сходящееся произведение Бляшке

$$B_{\infty}(w)=B(w)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{w-\lambda_k}{w-\bar{\lambda}_k}\varkappa_k \tag{6'}$$

---

* Система Мальмквиста для полуплоскости $G^{(+)}$ в частном случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_k=0$, косвенным путем была получена в работе [3].

Обозначим теперь через $H_2^{(+)}$ (соответственно $H_2^{(-)}$) множество голоморфных в полуплоскости $G^{(+)}$ ($G^{(-)}$) функций $F(w)$, для которых интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u+iv)|^2 \, du \leqslant M < +\infty$$

ограничены при всех $0 < v < \infty$ $(-\infty < v < 0)$.

Как известно ([4]), если $F(w) \in H_2^{(+)}$ $(H_2^{(-)})$, то почти для всех $u \in (-\infty, -\infty)$ существует

$$\lim_{\substack{v \to +0 \\ (v \to -0)}} F(u+iv) = F(u) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Наконец, при условии (4′) будем говорить, что определенная для $\operatorname{Im} w \neq 0$ функция $F(w)$ принадлежит классу $R_2^{(+)}\{\bar{\lambda}_k\}$, если

а) при $w \in G^{(+)}$ $F(w) \in H_2^{(+)}$,

б) при $w \in G^{(-)}$ имеет место представление

$$F(w) = B(w)\tilde{F}(w), \quad \text{где} \quad \tilde{F}(w) \in H_2^{(+)},$$

в) почти для всех $u \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{v \to +0} F(u+iv) = \lim_{v \to -0} F(u+iv) = F(u)$$

причем, очевидно, $F(u) \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Известно, что условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} = +\infty \tag{3'}$$

необходимо и достаточно для полноты системы Мальмквиста $\{\Phi_k(w)\}_1^\infty$ либо, что то же самое, соответствующей системы простых дробей $\left\{\frac{1}{(w-\bar{\lambda}_k)^{r_k}}\right\}_1^\infty$ (где $r_k \geqslant 1$—кратность появления числа λ_k в группе $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$) в классе функций $H_2^{(+)}$.

В случае же неполноты системы справедливы следующие теоремы.

---

* По этому поводу см. работы ([3,5,6]). Отметим также, что это утверждение является простой перефразировкой критерия полноты $\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|) = +\infty$ системы Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ $\left(\text{где } \alpha_k = \frac{\lambda_{k+1}-i}{\lambda_{k+1}+i}\right)$ в классе H_2 при переходе из круга $|z| < 1$ в полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

Теорема 1. *Пусть система чисел* $\{c_k\}_1^\infty$ *произвольна, но* $\sum_1^\infty |c_k|^2 < +\infty$, *тогда при условии (4′) ряд*

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(w)$$

равномерно сходится внутри $G^{(+)}$, *а также внутри* $G^{(-)} - \{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$, *определяя функцию* $F(w) \in R_2^{(+)}\{\lambda_k\}$.

Кроме того,

$$F(u) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(u), \quad (-\infty < u < +\infty)$$

где $F(u) \in L_2(-\infty, +\infty)$ — *предельное значение функции* $F(w)$ *на вещественной оси (как сверху, так и снизу)*

Теорема 2. *Пусть* $F(w) \in H_2^{(+)}$, *тогда при любом* $1 \leqslant n < +\infty$, *а при условии (4′) также при* $n = \infty$, *имеет место представление*

$$F(w) = \sum_{k=1}^{n} a_k(F)\Phi_k(w) + \frac{B_n(w)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ivw} g_n(v)\,dv = F_{1,n}(w) + F_{2,n}(w), \tag{8}$$

где

$$a_k(F) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\overline{\Phi_k(\xi)}\,d\xi \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

и почти для всех $v \in (0, +\infty)$

$$g_n(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iv\xi} - 1}{-i\xi} \frac{F(\xi)}{B_n(\xi)}\,d\xi. \tag{9}$$

Кроме того, при всех $1 \leqslant n \leqslant \infty$

$$F_{1,n}(w) \in R_2^{(+)}\{\lambda_k\}, \quad F_{2,n}(w) \in H_2^{(+)} \tag{10}$$

причем разложение $\sum_1^\infty a_k(F)\Phi_k(w)$ *(при* $(n = \infty)$ *равномерно и абсолютно сходится к функции* $F_{1,\infty}(w)$ *внутри множества* $G^{(+)} + G^{(-)} - \{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$ *и в среднем сходится к граничным значениям* $F_{1,\infty}(u) \in L_2(-\infty, +\infty)$. *Наконец, почти для всех* $u \in (-\infty, +\infty)$

$$F(u) = \frac{d}{du} \sum_{k=1}^{n} a_k(F) \int_0^u \Phi_k(t)\,dt +$$

$$+\frac{B_n(u)}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{du}\int\limits_0^\infty \frac{e^{ivu}-1}{iv}g_n(v)\,dv = F_{1,n}(u)+F_{2,n}(u), \tag{8'}$$

при этом функции $F_{1,n}(u)$ *и* $F_{2,n}(u)$ *ортогональны*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{1,n}(u)\overline{F_{2,n}(u)}\,du = 0, \tag{11}$$

и поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\,du = \pi\sum_{k=1}^{n}|a_k(F)|^2+\int\limits_0^\infty |g_n(v)|^2 dv \tag{12}$$

Кратко наметим доказательство этой теоремы. Для произвольных значений переменных z и w справедливы тождества*

$$\frac{1}{2i(\overline{\zeta}-w)} = \sum_{k=1}^{n}\overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(w)+\frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(w)}{2i(\overline{\zeta}-w)} \quad (n=1,\ 2,\cdots) \tag{13}$$

Так как любая функция $F(w)\in H_2^{(+)}$ представима интегралом Коши через свои граничные значения на вещественной оси, то имеем при $1\leqslant n<\infty$

$$F(w)=\sum_{k=1}^{n}a_k(F)\,\Phi_k(w)+$$

$$+\frac{B_n(w)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\xi)}{B_n(\xi)}\frac{d\xi}{\xi-z} = F_{1,n}(w)+F_{2,n}(w),\quad w\in G^{(+)} \tag{14}$$

Однако

$$\frac{1}{i(\xi-w)}=\int\limits_0^\infty e^{-i(\xi-w)v}dv,\quad w\in G^{(+)},$$

где интеграл справа сходится абсолютно и равномерно на всей оси $-\infty<\xi<+\infty$.

Пользуясь этой формулой, будем иметь

$$F_{2,n}(w)=\frac{B_n(w)}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{iwv}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\frac{F(\xi)}{B_n(\xi)}e^{-iv\xi}d\xi\right\}dv=$$

---

* Аналогичными тождествами более общей природы часто пользуются в теории приближений рациональными функциями (см., напр., Р. Лагранж ([7]), Э. Ломмель ([8]) и Уолш ([2])). Аналог этого тождества для системы $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ был получен также в работе ([9]) решением одной экстремальной задачи.

$$= \frac{B_n(w)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iwv} g_n(v)\, dv, \quad w \in G^{(+)} \tag{15}$$

где $g_n(v) \in L_2(0, +\infty)$ и определяется из (9).

Из (15) следует, что $F_{2,n}(w) \in H_2^{(+)}$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_{2,n}(u)|^2 du = \int_0^\infty |g_n(v)|^2 dv. \tag{16}$$

По теореме 1 при любом $1 \leqslant n \leqslant \infty$ $F_{1,n}(w) \in R_2^{(+)}\{\bar{\lambda}_k\}$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_{1,n}(u)|^2 du = \pi \sum_{k=1}^{n} |a_k(F)|^2. \tag{17}$$

Наконец, при $1 \leqslant n < +\infty$ по (14)

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{2,n}(u)\, \overline{\Phi_k(u)}\, du = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

откуда следует (11), вследствие чего из (16) и (17) вытекает равенство (12) теоремы. Таким образом, в случае, когда $1 \leqslant n < +\infty$, теорема доказана. Что касается случая $n = \infty$, когда согласно предположению выполняется условие (4'), то соответствующие утверждения теоремы устанавливаются путем предельного перехода при $n \to \infty$. На этом, однако, останавливаться не будем.

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Класс $R_2^{(+)}\{\bar{\lambda}_k\}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде ряда*

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(w), \quad w \in G^{(+)} + G^{(-)} + \{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$$

где система чисел $\{c_k\}_1^\infty$ произвольна и $\sum_1^\infty |c_k|^2 < +\infty$.

Отметим, что описание класса функций, допускающих аппроксимацию в $L_2(-\infty, +\infty)$ системой рациональных функций вида $\left\{\frac{1}{x - \lambda_n}\right\}_1^\infty$ $(\operatorname{Im} \lambda_n > 0)$, следует также из общих результатов, содержащихся в работе ([10]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Իրական առանցքի վրա Մալմկվիստի ոչ լրիվ սիստեմի լրիվացման մասին

Հոդվածում բերվում է $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա օրթոնորմալ Մալմկվիստի սիստեմի լրիվացման թեորեմի ապացույցը այն դեպքում, երբ այդ սիստեմը ծնող կոմպլեքս թվերի $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\mathrm{Im}\,\lambda_k > 0)$ հաջորդականությունը բավարարում է (4′) պայմանին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *F. Malmquist* Comptes rendus du sixième congrès (1925) des mathématiciens scandinaves, Kopenhagen, p. 253—259. [2] *Дж. Уолш*, Интерполяция и аппроксимация..., М.—Л. (1961), § 10. 7. [3] *Г. В. Бадалян*, Известия АН АрмССР, серия. физ.-мат. наук, т. 8, № 5; т. 9, № 1 (1956). [4] *R. Paley* and *N. Wiener*, Fourier Transforms, N. Y., 1934; [5] *A. Erdely*, The Journ. of the London Math. Soc. v. 18 (1943). [6] *Н. И. Ахиезер*, Лекции по теории аппроксимации М. М. (1947). [7] *R. Lagrange*, Acta Mathematica, v. 64 (1935). [8] *E. Laummel*, Math. Zeitschr., v. 46 (1940). [9] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, физ.-мат. сер., т. 9, № 7 (1956). [10] *Г. Ц. Тумаркин*, Автореферат докторской диссертации, Издание Ленинградского университета (1961).