ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXV 1962 2

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

Условия единственности для некоторого класса функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 29/IV 1962)

Голоморфная в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ принадлежит классу C, если интеграл

$$\int_0^{\varphi} |\lg|f(\rho e^{i\theta})||\, d\theta$$

равностепенно и абсолютно непрерывен относительно φ при $\rho \to 1$. В работе ([1]) А. Л. Шагиняном был установлен следующий результат.

Если $f(z)$ принадлежит классу функций C, а $\omega(t)$ — непрерывная, невозрастающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_E \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt < +\infty,\ \omega(0)=1,$$

на произвольном множестве E на отрезке $0 \leqslant t < 1$, то в любой точке круга $|z|<1$ имеет место оценка

$$|f(z)| < A \exp\left\{ \frac{1-|z|}{4} \cdot \frac{\int\limits_{E(L)} \omega(|z|) \lg|f(z)|\, d|z|}{\int\limits_E \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi(1-|z|)} \int_0^{2\pi} \lg^+ |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi \right\},$$

где A — определенная константа, а $E(L)$ — совокупность точек на произвольной спрямляемой дуге L, соединяющей начало координат с окружностью $|z|=1$, причем $E(L)$ образуется проектированием точек множества E на L дугами окружностей $|z|=\text{const}$. Предполагается, что L пересекается с этими окружностями лишь один раз.

Из этой оценки им же были получены некоторые новые теоремы единственности для функций класса C.

Следуя М. М. Джрбашяну, отнесем классу $A(\alpha)$ все функции $f(z)$, голоморфные в $|z|<1$ и удовлетворяющие условию

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \lg^+|f(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta<+\infty \qquad (\alpha>-1).$$

Для класса $A(\alpha)$ М. М. Джрбашяном [2] было установлено следующее интегральное представление

$$f(z)=\frac{k_\alpha}{c_\lambda}z^\lambda\pi_\alpha(z,\,a_\mu)\exp\left\{\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\lg|f(\rho e^{i\theta})|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta\right\} \quad \text{(A)}$$

Здесь $c_\lambda\neq 0$ — старший коэффициент ряда Лорана функции $f(z)$ в нулевой точке, $k_\alpha=\exp\left\{\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho)^\alpha\lg\frac{1}{\rho}\,d\rho\right\}$, a_μ — нули функции $f(z)$, пронумерованные в порядке неубывания их модулей, а $\pi_\alpha(z,\,a_\mu)$ имеет следующий вид

$$\pi_\alpha(z,\,a_\mu)=\prod_{\mu=1}^\infty\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-U_\alpha(z,\,a_\mu)},\qquad 0<|a_0|\leqslant|a_1|\leqslant\cdots, \quad \text{(B)}$$

где

$$U_\alpha(z,\,\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\lg\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta. \quad \text{(C)}$$

Бесконечное произведение $\pi_\alpha(z,\,a_\mu)$ в пределе, когда $\alpha\to-1$, совпадает с бесконечным произведением Бляшке.

В настоящей заметке, опираясь на интегральное представление (A), устанавливаются результаты, являющиеся естественными обобщениями указанных результатов А. Л. Шагиняна.

Автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность своему руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные советы при ее выполнении.

1°. Следуя работе [1], обозначим через $\omega(t)$ произвольную положительную непрерывную функцию, не возрастающую в промежутке $[0,\,1)$, и для которой

$$\int_E\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt<\infty, \quad (1.1)$$

где E — произвольная совокупность в промежутке $[0,\,1)$. Будем считать, что $\max\omega(t)=\omega(0)=1$.

Спроектируем круговыми дугами точки совокупности E, лежащей на радиусе $0\leqslant x<1$, на дугу L, которая соединяет центр круга с окружностью. Для простоты будем считать, что окружность

$|z| = \text{const}$ пересекают L в одной точке. После проектирования на L получим некоторую совокупность, которую обозначим через E^*.

Лемма 1. *Если* $\pi_\alpha(z, a_\mu)$ *есть произведение, соответствующее некоторой функции* $f(z) \in A(\alpha)$, *то имеет место следующее неравенство*

$$\int_{E^*} \omega(|z|)(1-|z|)^{\alpha+1} \lg|\pi_\alpha(z, a_\mu)|\, d|z| >$$

$$> -D\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \lg^+|f(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta - C, \qquad (1.2)$$

где D *и* C *определенные константы.*

Для произвольного произведения $\pi_\alpha(z, a_\mu)$ возможны случаи, когда

$$\int_0^1 (1-|z|)^{\alpha+1} \lg|\pi_\alpha(z, a_\mu)|\, d|z| = -\infty.$$

Это следует из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$; *для сходимости интеграла*

$$I = \int_0^1 (1-x)^{\alpha+1} \lg|\pi_\alpha(x, a_\mu)|\, dx$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^\infty (1-a_k)^{\alpha+2} \lg\frac{1}{1-a_k} < \infty.$$

Легко видеть, что если интеграл I расходится, он становится отрицательной бесконечностью. Это означает, что если числа $\{a_k\}$ выбраны так, что

$$\sum_{k=1}^\infty (1-a_k)^{\alpha+2} < +\infty,$$

однако

$$\sum_{k=1}^\infty (1-a_k)^{\alpha+2} \lg\frac{1}{1-a_k} = \infty,$$

то получим

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha+1} \lg|\pi_\alpha(x, a_\mu)|\, dx = -\infty$$

где $\pi_\alpha(x, a_\mu)$ — сходящееся произведение.

Можно доказать, что для неравенства типа (1.2) порядок убывания функции $\omega(t)$, характеризуемый условием (1.1), является точным.

2°. Для функции $f(z) \in A(\alpha)$ можно получить следующее неравенство

$$|f(z)| < C_1 \exp\left\{\frac{1}{\int\limits_E \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt}\int\limits_{E^*} \omega(|z|)\lg|f(z)|(1-|z|)^{\alpha+1}\,d|z| + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2}{(1-|z|)^{\alpha+2}}\right\}, \tag{2.1}$$

где C_1 и C_2 — определенные константы.

Если обозначим $\Omega(t) = \omega(t)(1-t)^{\alpha+1}$, то будем иметь

$$\int\limits_E \frac{\Omega(t)}{(1-t)^{\alpha+2}}\,dt < \infty, \tag{2.2}$$

и неравенство (2.1) примет следующий вид

$$|f(z)| < C_1 \exp\left\{\frac{1}{\int\limits_E \frac{\Omega(t)\,dt}{(1-t)^{\alpha+2}}}\int\limits_{E^*}\Omega(|z|)\lg|f(z)|\,d|z| + \frac{C_2}{(1-|z|)^{\alpha+2}}\right\}. \tag{2.3}$$

Из неравенства (2.2) получается следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Если* $f(z) \in A(\alpha)$ *и*

$$\int\limits_{E^*}\Omega(|z|)\lg|f(z)|\,d|z| = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Условия (2.2) относительно $\Omega(t)$, вообще говоря, ослабить нельзя. В самом деле, пусть $\Omega(t) = (1-t)^{\alpha+1}\lg_k^\delta \frac{e_k}{1-t}$, где $\lg_k$ есть k-кратный логарифм, $\delta > 0$, а $e_k = \exp(e_{k-1})$ $(k = 2, 3, \cdots)$, где $e_1 = e$, тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{\Omega(t)}{(1-t)^{\alpha+2}}\,dt = \infty. \tag{2.4}$$

Пусть

$$f(z) = \exp\left\{-\frac{1}{(1-z)^{\alpha+2}\lg\frac{e_1}{1-z}\lg_2\frac{e_2}{1-z}\cdots\lg_k^{1+\delta}\frac{e_k}{1-z}}\right\}.$$

Эта функция принадлежит классу $A(\alpha)$ и при $\Omega(t)$, удовлетворяющем условию (2.4),

$$\int\limits_{E^*}\Omega(|z|)\lg|f(z)|\,d|z| = -\infty,$$

где интеграл берется по любой внутренней дуге, исходящей из точки $|z| = 1$ внутри угла

$$|\arg(1 - z)| \leqslant \beta < \frac{\pi}{2(\alpha + 2)}.$$

Однако $f(z) \not\equiv 0$.

Используя эти результаты, как и в (1), можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Если* $f(z) \in A(\alpha)$, *то из*

$$|f(z)| \leqslant e^{-\frac{P(|z|)}{(1-|z|)^{\alpha+2}}}$$

следует $f(z) \equiv 0$, *если только* $P(|z|)$ *при* $|z| \to 1$ *стремится к* $+\infty$. *Условие относительно* $P(x)$, *вообще говоря, ослабить нельзя.*

Теорема 4. *Пусть* E *есть некоторое двумерно измеримое множество в* $|z| < 1$ *и* $f(z) \in A(\alpha)$, *тогда*

$$|f(z)| \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{\int\limits_E \frac{\Omega(t)}{(1-t)^{\alpha+2}}\,dt} \iint\limits_E \frac{\Omega(\rho)}{\rho} \lg|f(\rho e^{i\varphi})|\,\rho\,d\rho\,d\varphi + \frac{C_2}{(1-|z|)^{\alpha+2}}\right\}$$

и если

$$\iint\limits_E \frac{\Omega(\rho)}{\rho} \lg|f(\rho e^{i\varphi})|\,\rho\,d\rho\,d\varphi = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Теорема 5. *Если в* $|z| < 1$ *задано счетное множество* $\{\sigma_k\}$ *областей, причем в* σ_k $|f(z)| < m_k$, *то в любой точке круга, при* $f(z) \in A(\alpha)$ *имеет место неравенство*

$$|f(z)| \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{\int\limits_E \frac{\Omega(t)}{(1-t)^{\alpha+2}}\,dt} \sum_1^\infty \lg m_k \iint\limits_{\sigma_k} \frac{\Omega(\rho)}{\rho}\,d\sigma + \frac{C_2}{(1-|z|)^{\alpha+2}}\right\}.$$

Все предыдущие результаты при $\alpha \to -1$ совпадают с результатами А. Л. Шагиняна для класса C.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Միակության պայմաններ ֆունկցիաների որոշ դասի համար

Միավոր շրջանում հոլոմորֆ $f(z)$ *ֆունկցիան ասում են պատկանում է* C *դասին, եթե*

$$\int_0^{2\pi} |\lg|f(\rho e^{i\theta})|| \, d\theta$$

համասարաչափման բացարձակ անընդհատ է ըստ φ-ի, երբ $\rho \to 1$: Օգտվելով այս ֆունկցիաների դասի համար հայտնի ինտեգրալ ներկայացումից, Ա. Լ. Շահինյանի կողմից ստացված են միակության թեորեմներ այդ դասի ֆունկցիաների համար:

Ասում ենք, որ $f(z) \in A(\alpha)$ դասին, եթե նա հոլոմորֆ է $|z|<1$-ում և բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{\alpha} \lg^+ |f(\rho e^{i\theta})| \rho \, d\rho \, d\theta < +\infty \qquad (\alpha > -1)$$

Այս աշխատանքում օգտագործելով $A(\alpha)$ դասի համար Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ([2]) ստացված ինտեգրալ ներկայացումը, ապացուցվում է հետևյալ հիմնական անհավասարությունը:

Եթե $f(z) \in A(\alpha)$, իսկ

$$\int_E \frac{\Omega(t)}{(1-t)^{\alpha+2}} \, dt < +\infty,$$

որտեղ E կամայական բազմություն է $[0, 1)$-ում, իսկ $\Omega(t)$ անընդհատ է և չաճող, ապա

$$|f(z)| \leqslant C_1 \exp\left\{ \frac{1}{\int_E \frac{\Omega(t)}{(1-t)^{\alpha+2}} \, dt} \int_{E^*} \Omega(|z|) \lg|f(z)| \, d|z| + \frac{C_2}{(1-|z|)^{\alpha+2}} \right\}$$

E^* բազմությունը ստացվում է E-ից որոշակի ձևով: Այս անհավասարությունից ստացվում են այդ դասի ֆունկցիաների համար միակության թեորեմներ: Ստացված արդյունքները, երբ $\alpha \to -1$, համընկնում են C դասի համար Ա. Լ. Շահինյանի արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Шагинян*, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), том 12, № 1 (1959). [2] *М. М. Джрбашян*, К проблеме представимости аналитических функций. Сообщения Института математики и механики, вып. 2, 1948.