

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, академик АН Армянской ССР

Об интегральном представлении некоторых
 ортогональных систем

(Представлено 18/VI 1962)

В настоящей заметке приводятся интегральные представления одной ортогональной системы, а также систем полиномов Ф. Поллачека, ортогональных с весом на всей оси $(-\infty, +\infty)$, и родственных им систем, ортогональных на полуоси $(0, +\infty)$.

1°. Пусть $\{\sigma_k\}_0^\infty$ $\left(|\operatorname{Im} \sigma_k| < \frac{\pi}{2}\right)$ произвольная последовательность комплексных чисел и $p_k \geq 1$ есть кратность появления чисел σ_k в группе чисел $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\}$.

Обозначим

$$z_0(t) \equiv 1,$$

$$z_k(t) \equiv \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(\frac{3}{2} + it\right) \cdots \left(\frac{2k-1}{2} + it\right) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

и последовательности чисел $\{\sigma_k\}_0^\infty$ поставим в соответствие последовательность функций $\left\{z_{p_k-1}(t) e^{-i\sigma_k t}\right\}_0^\infty$, заметив при этом, что ввиду

$$\text{условия } |\operatorname{Im} \sigma_k| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} z_{p_k-1}(t) e^{-i\sigma_k t} \in L_2(-\infty, +\infty) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Обозначим через $\{\rho_k(t)\}_0^\infty$ ортогонализацию на всей оси $(-\infty, +\infty)$

с весом $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}}$ последовательности функций $\left\{z_{p_k-1}(t) e^{-i\sigma_k t}\right\}_0^\infty$.

Итак, по определению системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_n(t) \overline{\rho_m(t)}}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

причем функции $\rho_n(t)$ однозначно определяются с точностью до множителей вида $e^{i\alpha_n}$ ($\text{Im } \alpha_n = 0$).

Установлена следующая

Теорема 1. Для любой функции системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ справедливы интегральные формулы

$$\rho_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)} \int_0^\infty \tilde{\gamma}_{n+1}(x) x^{-\frac{1}{2} + it} dx, \quad (4)$$

где

$$\tilde{\gamma}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\frac{\text{Re } e^{\sigma_n}}{\pi}} \frac{i}{u + ie^{\sigma_n}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u - ie^{\sigma_k}}{u + ie^{\sigma_k}} e^{-ixu} du, \quad (5)$$

а также представление

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\text{Re } e^{\sigma_n}}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{u + ie^{\sigma_n}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u - ie^{\sigma_k}}{u + ie^{\sigma_k}} \left(e^{i\frac{\pi}{2} \arg u} |u| \right)^{-\frac{1}{2} - it} du. \quad (6)$$

Отметим, что система функций $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$, где $\gamma_n(x)$ определяется из формулы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\frac{\text{Re } \mu_n}{\pi}} \frac{i}{t + i\mu_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{t - i\bar{\mu}_k}{t + i\mu_k} e^{-ixt} dt = \begin{cases} \gamma_n(x), & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \quad (7)$$

а $\{\mu_k\}_1^\infty$ ($\text{Re } \mu_k > 0$) — произвольная последовательность комплексных чисел, ортонормальна на полуоси $(0, +\infty)$. В самом деле, по равенству Парсеваля из (7) имеем

$$\int_0^\infty \gamma_n(x) \overline{\gamma_m(x)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \Phi_n(x) \overline{\Phi_m(x)} dx = \delta_{nm}, \quad (8)$$

где функции

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{\text{Re } \mu_1}}{z + i\mu_1}, \quad \Phi_n(z) = \frac{\sqrt{\text{Re } \mu_n}}{z + i\mu_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - i\bar{\mu}_k}{z + i\mu_k} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

представляют собой систему рациональных функций Мальмквиста ^(1, 2), переведенную из круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\text{Im } z > 0$ дробно-линейным преобразованием и поэтому ортонормальную на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом $\frac{1}{\pi} dx$. (Подробнее об этом см. нашу следующую заметку). Впрочем, в этом легко убедиться также непосредственным подсчетом второго из интегралов (8).

Если обозначить через $s_k \geq 1$ кратность появления числа μ_k в группе чисел $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, то из (7) легко убедиться, что $\gamma_n(x)$ есть линейная комбинация первых n функций системы $\left\{ e^{-\mu_k x} x^{s_k-1} \right\}_1^\infty$. Таким образом, формулы (7) осуществляют эффективную ортогонализацию системы функций $\left\{ e^{-\mu_k x} x^{s_k-1} \right\}_1^\infty$ на полуоси $(0, +\infty)^*$.

* Ортогональная система $\{\gamma_k(x)\}_1^\infty$ в случае, когда $\text{Im } \mu_k = 0$ и $s_k = 1 (k \geq 1)$ по существу впервые была эффективно построена А. О. Гельфондом. В самом деле, для последовательности чисел $\{\alpha_n\}_0^\infty \left(\alpha_k > -\frac{1+\alpha}{2}, \alpha > -1 \right)$, удовлетворяющих условию $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$, иначе говоря, для которых кратность r_k появления числа α_k в группе $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ равна единице, в работе (3) изящным и кратким способом было установлено, что квазиполиномы

$$P_n^{(\alpha)}(u) = \sqrt{2\alpha_n + \alpha + 1} \sum_{k=0}^n \frac{Q(\alpha_k)}{R'(\alpha_k)} \frac{u^{\alpha_k}}{\alpha_n + \alpha_k + \alpha + 1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (a)$$

где

$$R(u) = \prod_{k=0}^n (u - \alpha_k), \quad Q(u) = \prod_{k=0}^n (u + \alpha_k + \alpha + 1),$$

составляют ортонормальную систему на отрезке $[0, 1]$ с весом u^α .

Очевидно, что формула (a) может быть записана также в виде контурного интеграла

$$P_n^{(\alpha)}(u) = \sqrt{2\alpha_n + \alpha + 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{Q(\zeta)}{R(\zeta)} \frac{u^\zeta}{\zeta + \alpha_n + \alpha + 1} d\zeta, \quad (a')$$

где C_n — замкнутый контур, охватывающий окрестности точек $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Простым предельным переходом в (a') можно легко убедиться в том, что если $-\frac{1+\alpha}{2} < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \dots$, т. е. если вообще $r_k \geq 1 (k \geq 0)$,

то формула (a') определяет некоторый квазиполином от системы функций

$$\left\{ u^{\alpha_k} (\log u)^{r_k-1} \right\}_0^n,$$

причем свойство ортонормальности соответствующей системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ не нарушается. Отметим, что системы функций вида $\left\{ u^{\alpha_k} (\log u)^{r_k-1} \right\}_0^\infty$ впервые были рассмотрены в работах (4, 5) в связи с обобщениями известных полиномов С. Н. Бернштейна

Отметим также, что интегральные представления (a') системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ А. О. Гельфонда и снятие ограничения $r_k = 1 (k \geq 0)$ содержатся в более поздней работе (6), где они приводятся впервые.

Следовательно, обозначив

Систему функций $\left\{ e^{-\frac{\pi}{2}|t|} e^{-i\sigma_k t} \right\}_0^\infty$, когда все числа $\{\sigma_k\}_0^\infty$

$\left(|\operatorname{Im} \sigma_k| < \frac{\pi}{2} \right)$ различны, впервые рассмотрели Винер и Палей ⁽⁹⁾,

которые одновременно дали критерий их полноты в $L_2(-\infty, +\infty)$.

Справедливо следующее обобщение теоремы Винера и Палей.

Теорема 2. Для полноты системы функций $\left\{ \frac{p_{k-1}(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} e^{-i\sigma_k t} \right\}$

в классе $L_2(-\infty, +\infty)$ или, что то же самое, для полноты соот-

ветствующей ортонормальной системы $\left\{ \frac{p_n(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} \right\}_0^\infty$ условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\operatorname{Im} \sigma_k)}{\operatorname{ch}(\operatorname{Re} \sigma_k)} = +\infty \quad (10)$$

необходимо и достаточно.

2°. Полагая, что $0 < \varphi < \pi$ и $\alpha > -1$ — фиксированные параметры и определяя систему полиномов $\{P_n^{(\alpha)}(t, \varphi)\}_0^\infty$ из рекуррентных уравнений

$$P_n^{(\alpha)}(t, \varphi) - \{(2n + \alpha - 1) \cos \varphi + 2t \sin \varphi\} P_{n-1}^{(\alpha)}(t, \varphi) + (n + \alpha - 1) P_{n-2}^{(\alpha)}(t, \varphi) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где положено $P_{-1}^{(\alpha)}(t, \varphi) \equiv 0$, $P_0^{(\alpha)}(t, \varphi) \equiv 1$, Ф. Поллачек ^(10, 11) доказал, что эта система ортогональна на всей оси $-\infty < t < +\infty$ при наличии весовой функции

$$w^{(\alpha)}(t, \varphi) = \frac{2^\alpha}{\pi} (\sin \varphi)^{1+\alpha} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) \right|^2 e^{-(\pi-2\varphi)t}, \quad (12)$$

$$\mu_k = \frac{1+\alpha}{2} + \alpha_{k-1} \quad (k \geq 1) \quad \text{и} \quad \gamma_n(x) = e^{-\frac{1+\alpha}{2}x} P_n^{(\alpha)}(e^{-x}),$$

закключаем, что $\gamma_n(x)$ есть линейная комбинация первых n функций системы

$\left\{ e^{-\mu_k x} x^{s_k-1} \right\}_1^\infty$, причем система $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ будет ортонормальной на полуоси

$(0, +\infty)$ в смысле

$$\int_0^\infty \gamma_n(x) \overline{\gamma_m(x)} dx = \delta_{nm}.$$

Что касается случая произвольных, вообще говоря, комплексных показателей $\{\mu_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \mu_k > 0$), $s_k \geq 1$ ($k \geq 1$), то представление функций $\gamma_n(x)$ в форме (7) было предложено в нашей заметке ⁽⁷⁾. Наконец, заметим еще, что в недавней работе ⁽⁸⁾ методом А. О. Гельфонда была установлена ортонормальность системы функций $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ с весом u^α на отрезке $[0, 1]$ при условии $\operatorname{Re} \alpha_n > -\frac{1+\alpha}{2}$, $r_k = 1$.

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^{(\alpha)}(t, \varphi) P_n^{(\alpha)}(t, \varphi) P_m^{(\alpha)}(t, \varphi) dt = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, \dots). \quad (13)$$

Установлена теорема.

Теорема 3. Для полиномов $P_n^{(\alpha)}(t, \varphi)$, удовлетворяющих условиям ортогональности (13) и обладающих положительным старшим коэффициентом, справедливо интегральное представление

$$P_n^{(\alpha)}(t, \varphi) = \frac{\exp\left\{-\left[\log 2 + i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) + in\varphi\right\}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right)} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{i\frac{x}{2}e^{i\varphi}} L_n^{(\alpha)}(x \sin \varphi) x^{\frac{\alpha-1}{2}+it} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad (15)$$

полиномы Лагерра.

Из представления (14) в качестве простого следствия вытекают как рекуррентные формулы (11), так и производящая функция системы $\{P_n^{(\alpha)}(t, \varphi)\}_0^{\infty}$

$$(1 - ze^{i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2}+it} (1 - ze^{-i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2}-it} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k^{(\alpha)}(t, \varphi), \quad (16)$$

полученная впервые Ф. Поллачеком.

Введем далее системы полиномов $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_0^{\infty}$ и $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_0^{\infty}$ посредством формул

$$A_n^{(\alpha)}(t) = P_{2n}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right), \\ B_n^{(\alpha)}(t) = t^{-\frac{1}{2}} P_{2n+1}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Для них устанавливается следующая

Теорема 4. а) Системы полиномов $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_0^{\infty}$ и $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_0^{\infty}$ ортонормальны на полуоси $(0, +\infty)$ в смысле

$$\int_0^{\infty} w_1^{(\alpha)}(t) A_n^{(\alpha)}(t) A_m^{(\alpha)}(t) dt = \frac{\Gamma(2n + 1 + \alpha)}{\Gamma(2n + 1)} \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

где



$$w_1^{(\alpha)}(t) = \frac{2^\alpha}{\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right) \right|^2 t^{-\frac{1}{2}} \quad (18')$$

и

$$\int_0^\infty w_2^{(\alpha)}(t) B_n^{(\alpha)}(t) B_m^{(\alpha)}(t) dt = \frac{\Gamma(2n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2)} \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (19)$$

где

$$w_2^{(\alpha)}(t) = \frac{2^\alpha}{\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right) \right|^2 t^{\frac{1}{2}}; \quad (19')$$

б) Справедливы интегральные представления

$$A_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\exp\left\{-\log 2 \left[\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right] + i\pi n\right\}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{2}} L_{2n}^{(\alpha)}(u) u^{\frac{\alpha-1}{2} + i\sqrt{t}} du, \quad (20)$$

$$B_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\exp\left\{-\log 2 \left[\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right] + i\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}}{\sqrt{t} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{2}} L_{2n+1}^{(\alpha)}(u) u^{\frac{\alpha-1}{2} + i\sqrt{t}} du; \quad (21)$$

в) Имеют место рекуррентные формулы

$$2n(2n-1)A_n^{(\alpha)}(t) + [8n^2 + 4n(\alpha-2) - 3\alpha + 5 - 4x]A_{n-1}^{(\alpha)}(t) + \\ + (2n + \alpha - 3)(2n + \alpha - 2)A_{n-2}^{(\alpha)}(t) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (22)$$

$$2n(2n+1)B_n^{(\alpha)}(t) + [8n^2 + 4n(\alpha-1) - \alpha + 1 - 4x]B_{n-1}^{(\alpha)}(t) + \\ + (2n + \alpha - 1)(2n + \alpha - 2)B_{n-2}^{(\alpha)}(t) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (23)$$

где следует положить

$$A_{-1}^{(\alpha)}(t) = B_{-1}^{(\alpha)}(t) \equiv 0, \quad A_0^{(\alpha)}(t) \equiv 1, \quad B_0^{(\alpha)}(t) \equiv 2.$$

В заключение отметим, что из интегральных представлений для систем $\{P_n^{(\alpha)}(t, \varphi)\}_0^\infty$, $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$, $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ непосредственно следует их полнота в соответствующих весовых пространствах L_2 .

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Որոշ օրթոգոնալ սխեմաների ինտեգրալ ներկայացման մասին

Ներկա հոդվածում բերվում են մի հատուկ օրթոգոնալ սխեմաներ և Ֆ. Պոլաչեկի կողմից դիտարկված $(-\infty, \infty)$ առանցքի վրա կշռի ներկայություն ունեցող օրթոգոնալ բազմանդամների սխեմաներ, ինչպես նաև $(0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա նմանօրինակ օրթոգոնալ սխեմաների ինտեգրալ ներկայացումները:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ F. Malmquist, Comptes rendus du Sixième Congrès (1925) des mathématiciens scandinaves (Copenhagen, 1926), pp. 253—259. ² Дж. Уолш, Интерполяция и аппроксимация..., М.-Л., (1961), § 10.7. ³ А. О. Гельфонд, Изв. АН СССР, мат. сер., т. 15, № 1 (1951). ⁴ F. Hausdorff, Math. Zeitschrift 9 (1921); 11, 280—299. ⁵ А. О. Гельфонд, Изв. АН СССР, мат. сер., т. 14 (1950). ⁶ Г. В. Бадалян, Изв. АН АрмССР, т. VIII, № 5 (1955). ⁷ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 3 (1961). ⁸ Э. Анарасио Бернардо, Вестн. Московск. университета, сер. I, № 2 (1962). ⁹ R. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms. N. Y., 1934. ¹⁰ F. Pollaczek, Comptes Rendus de l'Acad. Sc., Paris, 230 (1950). ¹¹ Т. Сеге, Ортогональные многочлены, М.-Л., 1962, 394—400.