ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXV 1962 1

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

Граничные предельные значения одного класса функций, мероморфных в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 23/V 1962)

Пусть D есть связная область, граница которой содержит более одной точки, а z_0 фиксированная точка в D. Если $G(z, z_0)$—функция Грина области D с особенностью в z_0, то обозначим через D_t область, границей которой является линия уровня $G(z, z_0) = t$. Мероморфная в D функция $w(z)$ отображает D_t на некоторую область римановой поверхности с площадью $S(t)$, причем точные сведения о функции $w(z)$ дает рост $S(t)$ при $t \to 0$. Так как $S(t)$ инвариантна при конформном отображении, то достаточно рассмотреть тот случай, когда D есть круг $|z| < 1$ и $z_0 = 0$. Тогда линиями уровня будут окружности $|z| = r$, а площадь области римановой поверхности, на которую отображает функция $w(z)$ круг $|z| < r$, обозначим через $A(r)$.

Согласно первой фундаментальной теореме теории мероморфных функций ([1]),

$$m(r, a) + N(r, a) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{A(t)}{t}\, dt = T(r),$$

где $T(r)$ есть характеристическая функция $w(z)$.

Обозначим через T_0 класс функций, для которых $T(r)$ остается ограниченной при $r \to 1$. Отметим два свойства функций этого класса, которые понадобятся нам в дальнейшем.

(A) $\lim\limits_{r \to 1-0} w(re^{i\theta})$ существует для всякого θ, кроме, быть может, множества меры нуль.

(B) Если $w(z) \not\equiv a$, то множество значений θ, удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{r \to 1-0} w(re^{i\theta}) = a$, имеет меру нуль.

В работе Л. Карлесона ([2]) рассмотрен более узкий класс функций T_α, для которых $S(t)$ растет медленнее, чем в случае класса T_0. Принадлежность функции $w(z)$ классу T_α выражается условием

$$\int_0 \frac{S(t)}{t^\alpha}\,dt < +\infty \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < 1$$

и

$$S(t) = O(1) \qquad \text{при} \quad \alpha = 1.$$

Для функций класса T_α Л. Карлесоном были получены более глубокие результаты, чем для класса T_0. В частности, если $w(z) \in T_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, то свойства (A) и (B) формулируются таким образом:

(A′) $\lim\limits_{r \to 1-0} w(re^{i\theta})$ существует для всякого θ, кроме, быть может, множества, внешняя $(1-\alpha)$ емкость которого равна нулю.

(B′) Если $w(z) \not\equiv a$, то внешняя $(1-\alpha)$ емкость множества значений θ, удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{r \to 1-0} w(re^{i\theta}) = a$, равна нулю, исключая, быть может, значения a, принадлежащие множеству плоской меры нуль.

В настоящей работе рассмотрены более широкие по сравнению с классом T_α классы T_H. Условимся говорить, что функция $w(z)$ принадлежит классу T_H, где H—функция, удовлетворяющая некоторым условиям, если

$$\int_0^1 S(t)\,H(t)\,dt < +\infty \quad \text{при} \quad \int_0^1 H(t)\,dt < \infty$$

и

$$S(t) = O(1) \qquad \text{при} \quad \int_0^1 H(t)\,dt = \infty.$$

Для класса T_H доказываются результаты, аналогичные свойствам (A′) и (B′), из которых, в частности, при $H(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, получаются результаты Л. Карлесона ([2]).

Автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность своему руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные советы при ее выполнении.

1°. *Мера Хаусдорфа и выпуклая емкость.* Пусть $h(r)$ есть вещественная функция, непрерывная и не убывающая при $r \geqslant 0$ и $h(0) = 0$. Если, кроме того, $r^{-2}h(r)$ — неубывающая функция при $r \to 0$, то $h(r)$ называют функцией меры или, короче, h функцией.

Пусть E—произвольное ограниченное множество, покрытое некоторой последовательностью кругов $\{c_\nu\}_1^\infty$ с радиусами $\{r_\nu\}_1^\infty$. Определим

$$M_h(E) = \inf \sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$$

для всех таких $\{c_\nu\}$.

Эта мера будет равна нулю в том и только в том случае, если равна нулю соответствующая мера Хаусдорфа. $M_h(E)$ носит характер внешней меры в том смысле, что

$$M_h(E) = \inf_{O \supset E} M_h(O),$$

где O—открытое множество. Внутренняя мера определяется так:

$$\underline{M}_h(E) = \sup_{F \subset E} M_h(F),$$

где F—совершенное множество, принадлежащее E.

Для произвольного открытого множества O имеем (²)

$$\underline{M}_h(O) \leqslant M_h(O) \leqslant 32\, \underline{M}_h(O).$$

Рассмотрим также другую меру, эквивалентную по существу $\underline{M}_h(E)$, впервые примененную Берлингом. Пусть Γ_h есть класс всех неотрицательных вполне аддитивных функций, таких, что

$$\mu(r, a) \leqslant h(r)$$

для всех a, где $\mu(r, a)$—масса, расположенная на части множества E, лежащего в круге радиуса r с центром в точке a, $h(r)$—некоторая h функция.

Для Борелевого множества E определим

$$M_h^*(E) = \sup_{\mu \in \Gamma_h} \mu(E).$$

Если E замкнутое Борелевое множество, то существует множество таких функций μ, для которых верхняя граница достигается. Для замкнутого Борелевого множества E (²)

$$M_h^*(E) \leqslant \underline{M}_h(E) \leqslant 36\, M_h^*(E).$$

В дальнейшем условимся говорить, что μ сосредоточена на E, если $\mu(E) = 1$.

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ называется выпуклой, если, полагая

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1},$$

имеем

$$\Delta^2 a_n \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Следуя Темко (³), введем понятие выпуклой емкости множества. Для этого рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$, обладающую теми свойствами, что 1) $\lambda_n \to 0$ и 2) $\{\lambda_n\}$ выпукла. Известно (⁴), что тогда ряд

$$Q(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx \qquad (1.1)$$

сходится всюду, кроме, быть может, $x = 0$, и является неотрицательной суммируемой функцией. Тогда функция

$$Q(r, x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n \cos nx, \tag{1.2}$$

как пуассоновская сумма от $Q(x)$, удовлетворяет условию $Q(r, x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Определение 2. Измеримое по Борелю множество $E \in [0, 2\pi]$ имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если существует мера μ, сосредоточенная на E, для которой функция

$$V(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x-t)\, d\mu(t) \tag{1.3}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1$.

В случае отсутствия такой μ, считаем выпуклую емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равной нулю.

В дальнейшем мы будем полагать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$.

Доказывается, что логарифмическую емкость и α—емкость можно рассматривать как частные случаи выпуклой емкости.

Связь между мерой Хаусдорфа и выпуклой емкостью дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $Q(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^n \cos nx$ *и* $Q(1, x) = Q(x)$. *Если для множества E выпуклая емкость $\{\lambda_n\}$ положительна, то и мера* $h(x) = \frac{1}{Q(x)}$ *также положительна.*

Определение 3. Условимся говорить, что непрерывная на $0 < t < \infty$ функция $H(t) \geqslant 0$ принадлежит классу $C_н$, если $H(0) = \infty$, $tH(t) \downarrow 0$, при $t \to 0$, и

$$\int_0 \frac{dt}{tH(t)} < \infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(t)\, dt = c, \quad \text{где} \quad c \neq 0, \infty.$$

Из теоремы 1, опираясь на теорему Салема [1], можно получить следующий результат

Теорема 2. *Если* $h(x) = \int_0^x H(u)\, du$, *где* $H(x) \in C_н$, *и мера h множества E равна нулю, то выпуклая емкость* $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ *множества E также равна нулю.*

Сформулируем теперь теорему, в некотором смысле обратную теореме 2.

Теорема 2. *Если для замкнутого множества E выпуклая емкость* $\lambda_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ *равна нулю, то всякая h—мера E, где h удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0 \frac{h'(t)}{H\left(\frac{1}{t}\right)}\, dt < +\infty$$

также равна нулю.

2°. *Класс $T_н$ и произведение Бляшке.* Для функции $w(z)$, мероморфной в $|z| < 1$, через $A(r)$ обозначают выражение

$$A(r) = \iint\limits_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\, dxdy, \quad z = x + iy.$$

Определение 4. Будем говорить, что функция $w(z)$ принадлежит классу $T_н$, где функция $H \in C_н$, если

$$T_н(w) \equiv \int\limits_0^1 A(t)\, H(1-t)\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \int\limits_0^1 H(1-u)\, du < \infty$$

и

$$T_1(w) \equiv \lim_{r \to 1-0} A(r) < +\infty \qquad \text{при} \quad \int\limits_0^1 H(1-u)\, du = \infty.$$

Если $n(r, a)$ означает число нулей функции $w(z) - a$ в круге $|z| < r$, а $d\sigma_a$ есть элемент площади, то будем иметь

$$T_н(w) = \int\limits_0^1 H(1-r)\, dr \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{n(r, a)\, d\sigma_a}{(1+|a|^2)^2}$$

и аналогично для $T_1(w)$.

Пусть на сфере Римана задана некоторая точка a_0, и s_0—часть поверхности сферы с центром в a_0. Введем следующее обозначение

$$q_н(a_0) = \overline{\lim_{|s_0| \to 0}} \frac{1}{|s_0|} \iint\limits_{S_0} \frac{d\sigma_a}{(1+|a|^2)^2} \int\limits_0^1 n(r, a)\, H(1-r)\, dr$$

$$\text{при} \int\limits_0^1 H(1-r)\, dr < \infty,$$

и

$$q_1(a_0) = \lim_{|s_0| \to 0} \frac{1}{|s_0|} \iint\limits_{S_0} \frac{n(1, a)}{(1+|a|^2)^2}\, d\sigma_a \quad \text{при} \quad \int\limits_0^1 H(1-r)\, dr = \infty,$$

где $|s_0|$ есть площадь s_0, а S_0—проекция s_0 на плоскость.

Определение 5. Назовем точку a_0 H—регулярной точкой, если $q_н(a_0)$ конечно, и H—исключительной точкой, если это выражение бесконечно.

В дальнейшем множество всех исключительных точек будем обозначать через $Q_н$. По теореме Лебега, если $w(z) \in T_н$, то двумерная лебегова мера множества $Q_н$ равна нулю

Приведем некоторые простые свойства класса $T_н$.

1) Если $w(z) \in T_н$ и $R(t)$ — некоторая рациональная функция, то $R(w(z)) \in T_н$.

2) Если $w_1(z)$ и $w_2(z)$—две ограниченные, голоморфные функции в $|z| < 1$, $|w_i(z)| \leqslant 1$, то

$$T_н(w_1 + w_2) \leqslant 8T_н(w_1) + 8T_н(w_2)$$

и

$$T_н(w_1 \cdot w_2) \leqslant 8T_н(w_1) + 8T_н(w_2).$$

3) Если $|w(z)| \leqslant 1$ и

$$w(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \quad |z| < 1,$$

то

$$mT_н(w) \leqslant \sum_0^\infty |a_n|^2 H\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant MT_н(w), \tag{2.1}$$

где m и M—постоянные.

Последний результат устанавливает связь между классом $T_н$ и тригонометрическими рядами. рассмотренными Темко. Сформулируем теорему Темко ([4]), которая играет важную роль в дальнейшем.

Теорема Темко. *Пусть* $H\left(\frac{1}{n}\right) \uparrow$ и $\sum \frac{1}{nH\left(\frac{1}{n}\right)} < \infty$. *Если*

$$\sum(a_n^2 + b_n^2) H\left(\frac{1}{n}\right) < \infty,$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

может расходиться только на множестве, имеющем выпуклую емкость, равную нулю относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, *где*

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Определим некоторый подкласс произведений Бляшке B_h для последовательности $\{a_\nu\}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{1}^{\infty} h(1 - |a_\nu|) < +\infty,$$

где h—некоторая функция меры, такая, что $\frac{h(t)}{t} \uparrow$ при $t \to 0$.

Если функция $h(t)$ имеет первую и вторую производные, непрерывные на $(0,1)$, и $h'(t) \to \infty$, при $t \to 0$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Для того, чтобы голоморфная в $|z| < 1$ функция принадлежала классу B_h, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $$\int_0^1 \int_0^{2\pi} h''(1-u) \, |\lg| w(re^{i\theta})| \, du \, d\theta < \infty, \text{ если } h(r) \neq r$$

и

2) $$\lim_{r \to 1-0} \int_0^{2\pi} |\lg| w(re^{i\theta})|| \, d\theta = 0, \text{ если } h(r) = r.$$

Связь между классами B_h и $T_н$ дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть* $h(t) = \int_0^t H(u)\, du$, *если* $B(z) \in B_h$, $w(z) \in T_н$

и
$$f(z) = \frac{w(z)}{B(z)}$$

то $f(z) \in T_н$.

Отсюда, в частности, вытекает, что $B_h \subset T_н$ при $h(t) = \int_0^t H(u) du$.

Используя теорему Бореля ([2]), можно установить также следующий результат.

Теорема 6. *Если $B(z) \in B_h$, то $B(z)$ имеет граничные радиальные пределы, равные по модулю единице, на окружности $|z| = 1$, исключая, быть может, множество E, h—мера которого равна нулю.*

3° *О радиальных предельных значениях функций класса $T_н$.* Сформулируем две вспомогательные теоремы.

Теорема 7. *Пусть*

$$U(z) \sim \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta), \quad z = re^{i\theta},$$

есть вещественная, непрерывная в точке $z = 0$ функция, имеющая непрерывные частные производные в $|z| \leqslant 1$, исключая конечное число аналитических кривых. Пусть коэффициенты Фурье этой функции непрерывны от r при $0 \leqslant r < 1$.

Если обозначим

$$D_h(U)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)^2\right\}h(1-r)\,dr,$$

то имеет место неравенство

$$\sum_1^\infty[a_n^2(1)+b_n^2(1)]\,H\left(\frac{1}{n}\right)\leq MD_h(U)$$

где $h(t)=\int_0^t H(u)\,du$, *а* M*—константа.*

Теорема 8. *Пусть* $F(e)$*—вполне аддитивная функция множества* e, *определенная в* $|z|<1$, *положим*

$$m(r)=\iint_{|\xi|<1}|dF(\xi)|,\ r<1.$$

Если

а) $\int_0^1 H(1-r)\,m(r)\,dr<\infty$ *при* $\int_0^1 H(1-r)\,dr<\infty$

и

б) $m(r)=O(1)$ *при* $\int_0^1 H(1-r)\,dr=\infty$,

то всюду, исключая, быть может, множество значений $\theta\in E$, *выпуклая емкость* $\lambda_n=\sum_{k=n}^\infty\frac{1}{kH\left(\frac{1}{n}\right)}$ *которого равна нулю,*

$$\lim_{r\to1-0}\iint_{|\xi|<1}G(re^{i\theta},\xi)\,dF(\xi)=0,$$

где $G(z,\xi)$ *—функция Грина круга* $|z|<1$ *с полюсом в* $z=\xi$.

Результаты теорем 7 и 8 дают возможность установить следующие основные теоремы о радиальных предельных значениях.

Теорема 9. *Если* $w(z)\in T_н$, *то* $\lim_{r\to1-0}w(re^{i\theta})$ *существует для всякого* θ, *исключая, быть может, множество значений* $\theta\in E$, *выпуклая емкость* $\lambda_n=\sum_{k=n}^\infty\frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ *которого равна нулю.*

Теорема 10. *Если* $w(z)\in T_н$, $w(z)\neq a$ *и* E*—множество тех значений* θ, *для которых* $\lim_{r\to1-0}w(re^{i\theta})=a$, *то выпуклая емкость* $\lambda_n=\sum_{k=n}^\infty\frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ *множества* E *равна нулю, исключая случай, когда* $a\in Q_н$, *т. е. почти для всех* a *римановой сферы.*

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների մի դասի եզրային արժեքները

Կասենք, որ $H(t) \geqslant 0$ ֆունկցիան պատկանում է C_{H} դասին, եթե $H(0)=\infty$, $tH(t)\downarrow 0$ երբ $t \to 0$ և

$$\int_0 \frac{dt}{tH(t)} < \infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(u)\,du = c, \text{ որտեղ } c \neq 0, \infty.$$

Հոդվածում նախ ստեղծվում է կապ բազմության ուռուցիկ ունակության և Հաուսդորֆի չափի մեջ, մասնավորապես ապացուցված է

Թեորեմ. Եթե $h(x) = \int_0^x H(u)\,du$, որտեղ $H(u) \in C_{H}$ և E բազմության h-չափը զերո է, ապա E բազմության $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ ուռուցիկ ունակությունը նույնպես զերո է։

Եթե $w(z)$ մերոմորֆ ֆունկցիայի համար նշանակենք

$$A(r) = \iint_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\,dx\,dy, \quad z = x+iy,$$

ապա կասենք $w(z) \in T_{H}$, եթե

$$T_{H}(w) \equiv \int_0^1 A(t)\,H(1-t)\,dt < \infty, \text{ երբ } \int_0^1 H(1-u)\,du < \infty$$

և

$$T_1(w) \equiv \lim_{r\to 1-0} A(r) < \infty, \qquad \text{երբ } \int_0^1 H(1-u)\,du = \infty.$$

Ապացուցվում է հետևյալը

Թեորեմ — Եթե $w(z) \in T_{H}$, ապա $\lim\limits_{r\to 1-0} w(re^{i\theta})$ գոյություն ունի ամեն մի θ-ի համար բացի գուցե, θ-արժեքների մի E բազմության, որի $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ ուռուցիկ ունակությունը զերո է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Неванлина*, Однозначные аналитические функции, М., 1941. [2] *L. Carleson*, On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets. Uppsala, 1950. [3] *К. Темко*, Выпуклая емкость и ряды Фурье, ДАН, т. 110, № 6, 1956. [4] *Н. Бари*, Тригонометрические ряды, М., 1961.