ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIV 1962 4

МАТЕМАТИКА

Н. У. Аракелян

О равномерном приближении целыми функциями на неограниченных континуумах и оценке скорости их роста

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/II 1962)

В настоящей заметке рассматривается вопрос об оценке роста аппроксимирующих целых функций в случае равномерного приближения в угле, полосе или на системе лучей. Круг этих задач примыкает к соответствующим вопросам работы М. В. Келдыша ([1]). Им, в частности, решались следующие задачи:

1) Если аппроксимируемая функция $f(z)$ голоморфна в полосе шириной π или в угле раствора α, то приближение к ней осуществляется соответственно в полосе шириной $\pi-\delta$ или в угле раствора $\alpha-\delta$ и одновременно оценивается рост приближающих целых функций $G(z)$ в зависимости от π, α и роста самой $f(z)$. Отметим, что в оценках роста $G(z)$ ее близость к $f(z)$, а также число δ фигурируют не явно.

2) Аналогичная задача ставилась и решалась и в случае приближения на действительной оси. В этом случае рост аппроксимирующей функции естественно связывать с дифференциальными свойствами приближаемой функции $f(x)$. Было установлено, что если

$$\mu(x) = \max_{|t|<x} |f'(t)|$$

и

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln\mu(x)}{\ln x} = \nu < +\infty,$$

то существуют целые функции порядка не выше $\nu+1$, равномерно аппроксимирующие $f(x)$ на всей действительной оси.

В приводимых ниже теоремах 1 и 2 рассматривается аналогичная первой задача с той разницей, что в них аппроксимация осуществляется в первоначальных *замкнутых* полосах или углах, предполагая непрерывную дифференцируемость $f(z)$ на границе. Аналогом второй задачи является теорема 3, где, помимо того, что приближение рассматривается на системе лучей, рост величины $\mu(x)$ не подчиняется каким-либо ограничениям. В этих теоремах дается оценка роста аппроксимирующих целых функций в зависимости от метрических свойств того континуума, где рассматривается приближение, от характеристик роста приближаемой функции и ее производной и, кроме того, от самого порядка малости приближения.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в полосе* s: $|\operatorname{Im} z| < \frac{h}{2}$ *и непрерывно дифференцируема на* $\bar{s}$ *(за исключением точки* $z=\infty$*). Обозначим*

$$M(r) = \max_{\substack{z \in s \\ |z| < r}} |f(z)|, \quad \mu(r) = \max_{\substack{|\operatorname{Im} z| = \frac{h}{2} \\ |z| < r}} |f'(z)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует целая функция* $G(z)$, *удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in \bar{s},$$

рост которой ограничивается неравенством

$$|G(z)| < c \exp\left\{c \frac{t}{\varepsilon} \mu(t) \ln \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \ln \frac{M(t)\mu(t)}{\varepsilon}\right\},$$

где $t = 2|z| + 1$, c *не зависит от* ε *и* t.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в угле* $\Delta_\alpha: |\arg z| < \frac{\alpha}{2}$ *и непрерывно дифференцируема на* $\bar{\Delta}_\alpha$. *Обозначим*

$$M(r) = \max_{\substack{z \in \Delta_\alpha \\ |z| < r}} |f(z)|, \quad \mu(r) = \max_{\substack{|\arg z| = \frac{\alpha}{2} \\ |z| < r}} \begin{cases} |z^{1-\rho} f'(z)| & \text{при} \quad \alpha \leqslant \pi, \\ |f'(z)| & \text{при} \quad \alpha \geqslant \pi, \end{cases}$$

где

$$\rho = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ *можно построить целую функцию* $G(z)$, *удовлетворяющую неравенству*

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon$$

в замкнутом угле $\bar{\Delta}_\alpha$. *При этом скорость роста* $G(z)$ *ограничивается неравенствами:*

при $\alpha \leqslant \pi$

$$|G(z)| < c \exp\left\{ct^\rho \left[\frac{1}{\varepsilon^\rho} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \ln \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \ln \frac{t\mu(t) M(t)}{\varepsilon}\right]\right\},$$

где

$$t = 2|z| + 1;$$

при $\alpha \geqslant \pi$

$$|G(z)| < c \exp\left\{c(|z| + 1)^\rho \left[\frac{1}{\varepsilon^\rho} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\max_{1<t<2|z|+1}\frac{\mu(t)}{t^{\rho-1}}\ln\frac{\mu(t)}{\varepsilon}\ln\frac{M(t)\mu(t)}{\varepsilon}\Bigg]\Bigg\},$$

с не зависит от ε *и* z.

Отметим одно следствие из теоремы 2: *если* $f(z)$ *голоморфна в угле* $|\arg z|<\frac{\alpha}{2}$, *а функция* $f(z^{\frac{1}{\rho}})\left(\rho=\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\right)$ *равномерно непрерывна в* $|\arg z|\leqslant\frac{\alpha\rho}{2}$, *то* $f(z)$ *можно равномерно в* $|\arg z|\leqslant\frac{\alpha}{2}$ *приблизить целыми функциями порядка не больше* ρ. С этим фактом хорошо согласуется предположение Кобера ([2]) о том, что при дополнительном предположении равномерной ограниченности $f(z)$ ее можно равномерно аппроксимировать целыми функциями порядка $<\rho$ и конечного типа.

В приводимой ниже теореме содержится предельный случай $\alpha=0$ теоремы 2 (см. случай $n=1$).

Теорема 3. *Пусть* Ω — *система, состоящая из* n *лучей, исходящих из точки* $z=0$, α — *минимальный угол между ними. Пусть* $f(z)$ *имеет непрерывную производную на* Ω *и*

$$M(r)=\max_{\substack{z\in\Omega\\|z|<r}}|f(z)|,\quad \mu(r)=\max_{\substack{z\in\Omega\\|z|\leqslant r}}\begin{cases}|z^{\frac{1}{2}}f'(z)| & \text{при}\quad n=1,\\ |f'(z)| & \text{при}\quad n>1.\end{cases}$$

Тогда при любом $\varepsilon>0$ *существует целая функция* $G(z)$, *удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon$$

на системе Ω. *Рост этой целой функции ограничивается неравенством:*

при $n=1$

$$|G(z)|<c\exp\left\{\frac{c}{\varepsilon}t^{\frac{1}{2}}\mu(t)\ln\frac{1}{\varepsilon}\mu(t)M(t)\right\},$$

где $t=2|z|+1$, c — *абсолютная константа*;

при $n=2$

$$|G(z)|<c(\alpha)\exp\left\{c(\alpha)(|z|+1)^{\frac{\pi}{\alpha}}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\pi}{\alpha}}}\ln\frac{1}{\varepsilon}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\varepsilon}\max_{1<t<2|z|+1}\frac{\mu(t)\ln\frac{1}{\varepsilon}M(t)\mu(t)}{t^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}\right]\right\};$$

при $n\geqslant 2$

$$|G(z)| < c(\alpha)\exp\left\{ c(\alpha)(|z|+1)^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{\pi}{\alpha}}}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\max_{1 \leqslant t \leqslant 2|z|+1} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{\pi}{\alpha}-1}} \ln\frac{t}{\varepsilon} M(t)\,\mu(t) \right\}.$$

Из этой теоремы следует указанный выше результат М. В. Келдыша в несколько более общей формулировке:

Если в случае $n > 1$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln \dfrac{\mu(t)}{t^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}}{\ln t} = \nu < +\infty,$$

то $f(z)$ можно равномерно аппроксимировать целыми функциями порядка не больше $\nu + \dfrac{\pi}{\alpha}$, а если

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mu(t)\ln\mu(t)M(t)}{t^{\frac{\pi}{\alpha}-1+\nu}} < +\infty$$

—целыми функциями того же порядка и конечного типа $\leqslant \sigma$,

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{c(\alpha, f)}{\varepsilon^{\frac{\pi}{\alpha}}}\ln\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{при } \nu = 0, \\[2ex] \dfrac{c(\alpha, f)}{\varepsilon}\ln\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{при } \nu > 0. \end{cases}$$

Приводим также одну теорему типа, отмеченного в начале результатов М. В. Келдыша, а именно, когда $f(z)$ аналитична в некоторой области, но приближение к ней осуществляется в более узкой области.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D:*

$$|y| \leqslant \frac{\vartheta(x) + h}{2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

причем $h \geqslant 0$, $\vartheta(x) > 0$, и имеет ограниченную вариацию на каждом ограниченном отрезке.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция $G(z)$ такая, что при $|\operatorname{Im} z| \leqslant \dfrac{h}{2}$ выполняется неравенство

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon.$$

Кроме того, справедлива оценка

$$|G(z)| < \max_{|\zeta| < 2|z|} \left\{ \vartheta(\xi) \exp \left[c(h) \frac{|z|+1}{\vartheta(\xi)} \ln \frac{M(|\zeta|)(1+L(|\zeta|))}{\varepsilon \vartheta(\xi)} \right] \right\},$$

где $\zeta = \xi + i \dfrac{\vartheta(\xi) + h}{2}$, $L(r)$ — *длина части кривой* $y = \dfrac{\vartheta(x) + h}{2}$, *лежащей в круге* $|z| \leqslant r$, $M(r) = \max\limits_{\substack{z \in D \\ |z| < r}} |f(z)|$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность моему руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и за ценные советы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Անսահմանափակ կոնտինուումների վրա ամբողջ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկումների և նրանց աճման արագությունը գնահատելու մասին

Դիտարկվում է անկյան մեջ, շերտում կամ ճառագայթների սիստեմի վրա ամբողջ ֆունկցիաներով հավասարաչափ կերպով մոտարկելիս մոտարկվող ամբողջ ֆունկցիաների աճման արագությունը գնահատելու հարցը: 1—4 թեորեմներում այդ արագությունը կապվում է ինչպես մոտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալ հատկությունների, այնպես էլ այն բազմության չափական հատկությունների հետ, որի վրա իրականացվում է մոտարկումը:

Բերենք մի հատկանշական արդյունք.

Թեորեմ. Թող $f(z)$ ֆունկցիան լինի անալիտիկ S: $|\operatorname{Im} z| < \frac{h}{2}$ շերտում և ունենա անընդհատ ածանցյալ S-ում (բացառությամբ, գուցե, $z = \infty$ կետի): Նշանակենք

$$M(r) = \max_{\substack{z \in \bar{S} \\ |z| < r}} |f(z)|, \qquad \mu(r) = \max_{\substack{|\operatorname{Im} z| < \frac{h}{2} \\ |z| < r}} |f'(z)|.$$

Այնժամ յուրաքանչյուր $\varepsilon < 0$ թվի համար գոյություն կունենա մի $G(z)$ ամբողջ ֆունկցիա այնպես, որ

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ երբ } z \in S,$$

ընդ որում այդ ֆունկցիայի աճման արագությունը գնահատվում է

$$|G(z)| < c \exp \left\{ c \frac{t}{\varepsilon} \mu(t) \ln \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \ln \frac{M(t)\mu(t)}{\varepsilon} \right\}$$

անհավասարությամբ, որտեղ $t = 2|z| + 1$, իսկ c-ն կախված չէ ε և t մեծություններից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. В. Келдыш*, О приближении голоморфных функций целыми функциями. ДАН СССР, т. 47 (1945), 243—245. [2] *H. Kober*, Approximation by integral functions in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 54 (1944), 7—31.