ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIV 1962 3

МЕХАНИКА

В. Ц. Гнуни

Об устойчивости несимметрично-собранных слоистых гибких пологих оболочек

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 26/I 1962)

Рассмотрим гибкую пологую оболочку, собранную из произвольного числа однородных ортотропных слоев.

Пусть α и β являются криволинейными ортогональными координатами, совпадающими с линиями кривизны координатной поверхности, γ — расстояние по нормали от точки (α, β, γ) до точки $(\alpha, \beta, 0)$.

За координатную поверхность принимается внешняя поверхность с выпуклой стороны оболочки.

Считаем, что плоскости упругой симметрии материалов каждого слоя перпендикулярны к координатным линиям α, β, γ.

Предполагаем, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей ([1-3]).

На основе ([1-4]) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости

$$a_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\beta^4}+k_1\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+k_2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+$$

$$+p_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+(p_{12}+p_{21}-2p_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+p_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=0, \tag{1}$$

$$(D_{11}-D_{11}^0)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+2(D_{12}-D_{12}^0+2D_{66}-2D_{66}^0)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+$$

$$+(D_{22}-D_{22}^0)\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-k_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-k_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-p_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4}-(p_{12}+p_{21}-2p_{66})\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+$$

$$-p_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\beta^4}-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+$$

$$+T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}=0. \tag{2}$$

Здесь w — нормальное перемещение, φ — функция напряжений,

$$a_{11}=\frac{C_{11}}{\Omega},\quad a_{12}=\frac{C_{12}}{\Omega},\quad a_{22}=\frac{C_{22}}{\Omega},\quad a_{66}=\frac{1}{C_{66}},\quad \Omega=C_{11}C_{22}-C_{12}^2, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &p_{11}=a_{11}K_{12}-a_{12}K_{11},\quad p_{22}=a_{22}K_{12}-a_{12}K_{22},\\ &p_{12}=a_{11}K_{22}-a_{12}K_{12},\quad p_{21}=a_{22}K_{11}-a_{12}K_{12},\quad p_{66}=a_{66}K_{66}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &D_{11}^0=p_{11}K_{12}+p_{21}K_{11},\quad D_{22}^0=p_{22}K_{12}+p_{12}K_{22},\\ &D_{12}^0=D_{21}^0=p_{11}K_{22}+p_{21}K_{12}=p_{22}K_{11}+p_{12}K_{12},\quad D_{66}^0=p_{66}K_{66}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} C_{ik}&=\sum_{j=1}^{n}B_{ik}^j(\delta_j-\delta_{j-1}),\\ K_{ik}&=\sum_{j=1}^{n}B_{ik}^j(\delta_j^2-\delta_{j-1}^2),\\ D_{ik}&=\sum_{j=1}^{n}B_{ik}^j(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3), \end{aligned} \tag{6}$$

$$B_{11}^j=\frac{E_1^j}{1-\mu_1^j\mu_2^j},\quad B_{22}^j=\frac{E_2^j}{1-\mu_1^j\mu_2^j},\quad B_{12}^j=\mu_1^jB_{22}^j=\mu_2^jB_{11}^j,\quad B_{66}^j=G_{\alpha\beta}^j. \tag{7}$$

Пусть прямоугольная в плане (axb) оболочка радиально оперта по четырем краям, тогда, представляя решение системы уравнений (1) и (2) в виде

$$\begin{aligned} &w(\alpha,\beta)=f_{mn}\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta,\\ &\varphi(\alpha,\beta)=\Phi_{mn}\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta,\\ &\lambda_n=n\pi/a,\quad \mu_m=m\pi/b, \end{aligned} \tag{8}$$

тождественно удовлетворим условиям радиального опирания краев.

На основе вариационного метода Бубнова-Галеркина из системы уравнений (1) и (2), в силу (8), для определения стрелы прогиба f_{mn} получим следующее алгебраическое уравнение

$$\beta_{mn}f_{mn}^3+\alpha_{mn}f_{mn}^2+(K_{mn}-\lambda_n^2T_1^{0mn}-\mu_m^2T_2^0)f_{mn}=0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} K_{mn}&=(D_{11}-D_{11}^0)\lambda_n^4+2(D_{12}-D_{12}^0+2D_{66}-2D_{66}^0)\lambda_n^2\mu_m^2+\\ &+(D_{22}-D_{22}^0)\mu_m^4+\frac{[(k_1\mu_m^2+k_2\lambda_n^2)-[p_{11}\lambda_n^4+(p_{12}+p_{21}-2p_{66})\lambda_n^2\mu_m^2+p_{22}\mu_m^4]]^2}{a_{11}\lambda_n^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2+a_{11}\mu_m^4}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\alpha_{mn}=-\frac{16\lambda_n\mu_m}{ab}\left[\frac{(k_1\mu_m^2+k_2\lambda_n^2)-p_{11}\lambda_n^4-(p_{12}+p_{21}-2p_{66})\lambda_n^2\mu_m^2-p_{22}\mu_m^4}{(a_{11}\lambda_n^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2+a_{22}\mu_m^4)}\right], \tag{11}$$

$$\beta_{mn} = \frac{512}{9} \frac{\lambda_n^2 \mu_m^2}{a^2 b^2} \frac{1}{a_{11}\lambda_n^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{22}\mu_m^4}. \tag{12}$$

Пусть

$$T_1^{0mn} = P_{mn}, \quad T_2^{0mn} = kP_{mn}, \tag{13}$$

где P_{mn} — параметр нагрузки, k — некоторый коэффициент; тогда уравнение (9) можно привести в виде

$$\bar{\beta}_{mn} f_{mn}^3 + \bar{\alpha}_{mn} f_{mn}^2 - (P_{mn} - \bar{K}_{mn}) f_{mn} = 0, \tag{14}$$

где

$$\bar{K}_{mn} = \frac{K_{mn}}{\lambda_n^2 + k\mu_m^2}, \quad \bar{\alpha}_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{\lambda_n^2 + k\mu_m^2}, \quad \bar{\beta}_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{\lambda_n^2 + k\mu_m^2}. \tag{15}$$

Считая, что после потери устойчивости $f_{mn} \neq 0$, найдем

$$P_{*mn} = P_{mn}^* + \bar{\alpha}_{mn} f_{mn} + \bar{\beta}_{mn} f_{mn}^2. \tag{16}$$

Здесь P_{mn}^* — верхняя критическая нагрузка, а P_{*mn} — нижняя критическая нагрузка.

Из соотношений (11), (12), (16) видно, что изменение нагрузки после потери устойчивости будет различным в зависимости от количества и расположения слоев и кривизны срединной поверхности.

Отметим, что здесь, в отличие от случаев однослойных ([2]) и симметрично собранных слоистых ([5]) пластинок, в случае пластинки ($k_1 = k_2 = 0$) линейный член в (16) не исчезает. В этом случае, как это нетрудно заметить из (11), если

$$p_{11}\lambda_n^4 + (p_{12} + p_{21} - 2p_{66})\lambda_n^2 \mu_m^2 + p_{22}\mu_m^4 < 0, \tag{17}$$

то $\bar{\alpha}_{mn} < 0$ и для пластинки получается явление хлопка. В силу чего становится необходимым определение нижней критической нагрузки пластинки

$$P_{*mn} = P_{mn}^* - |\bar{\alpha}_{mn}| f_{mn} + \bar{\beta}_{mn} f_{mn}^2. \tag{18}$$

В случае оболочек, если

$$p_{11}\lambda_n^4 + (p_{12} + p_{21} - 2p_{66})\lambda_n^2 \mu_m^2 + p_{22}\mu_m^4 > (k_1\mu_m^2 + k_2\lambda_n^2) > 0, \tag{19}$$

то $\bar{\alpha}_{mn} > 0$ и нагрузка после потери устойчивости не будет уменьшаться. В этом случае нет необходимости определения нижней критической нагрузки, так как она не существует.

В случае, когда $\bar{\alpha}_{mn} < 0$, после потери устойчивости оболочки, нагрузка будет падать до нижней критической нагрузки P_{*mn}, которая определяется из условия (16).

В заключение отметим, что вышеприведенные выкладки повторяются и в том случае, когда неоднородность оболочки непрерывно меняется по толщине, т. е. упругие постоянные оболочки зависят от координаты γ.

Отметим также, что, если оболочка собрана из изотропных слоев и коэффициенты Пуассона одинаковы для всех слоев, соответствующим выбором координатной поверхности можно добиться того, что $K_m < 0$ или $K_m > 0$, следовательно, и $K_m = 0$ (²).

Это показывает, что для несимметрично собранных оболочек существенную роль играет расположение координатной поверхности, т. е. где действуют внешние усилия и где закрепляется оболочка.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

Շերտավոր անիզոտրոպ ճկուն թաղանթների կայունության մասին

Դիտարկվում է ոչ-սիմետրիկ հավաքած շերտավոր օրթոտրոպ ճկուն թաղանթների կայունության խնդիրը։

Ստացված է ստորին կրիտիկական ուժի բանաձևը։

Ապացուցվում է, որ թաղանթի շերտերի որոշակի դասավորվածության դեպքում հնարավոր է, որ ստորին կրիտիկական ուժը գոյություն չունենա և հնարավոր է նրա գոյությունը սալերի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян*, Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961. [2] *А. С. Вольмир*, Гибкие пластинки и оболочки, ГИТТЛ, М., 1956. [3] *С. А. Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР (серия ФМЕТ), т. VI, № 3, 1953. [4] *Б. З. Власов*, Общая теория оболочек. ГИТТЛ, М.-Л., 1949. [5] *В. Ц. Гнуни*, Изв. АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XIII, № 1 (1960).