ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIV 1962 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

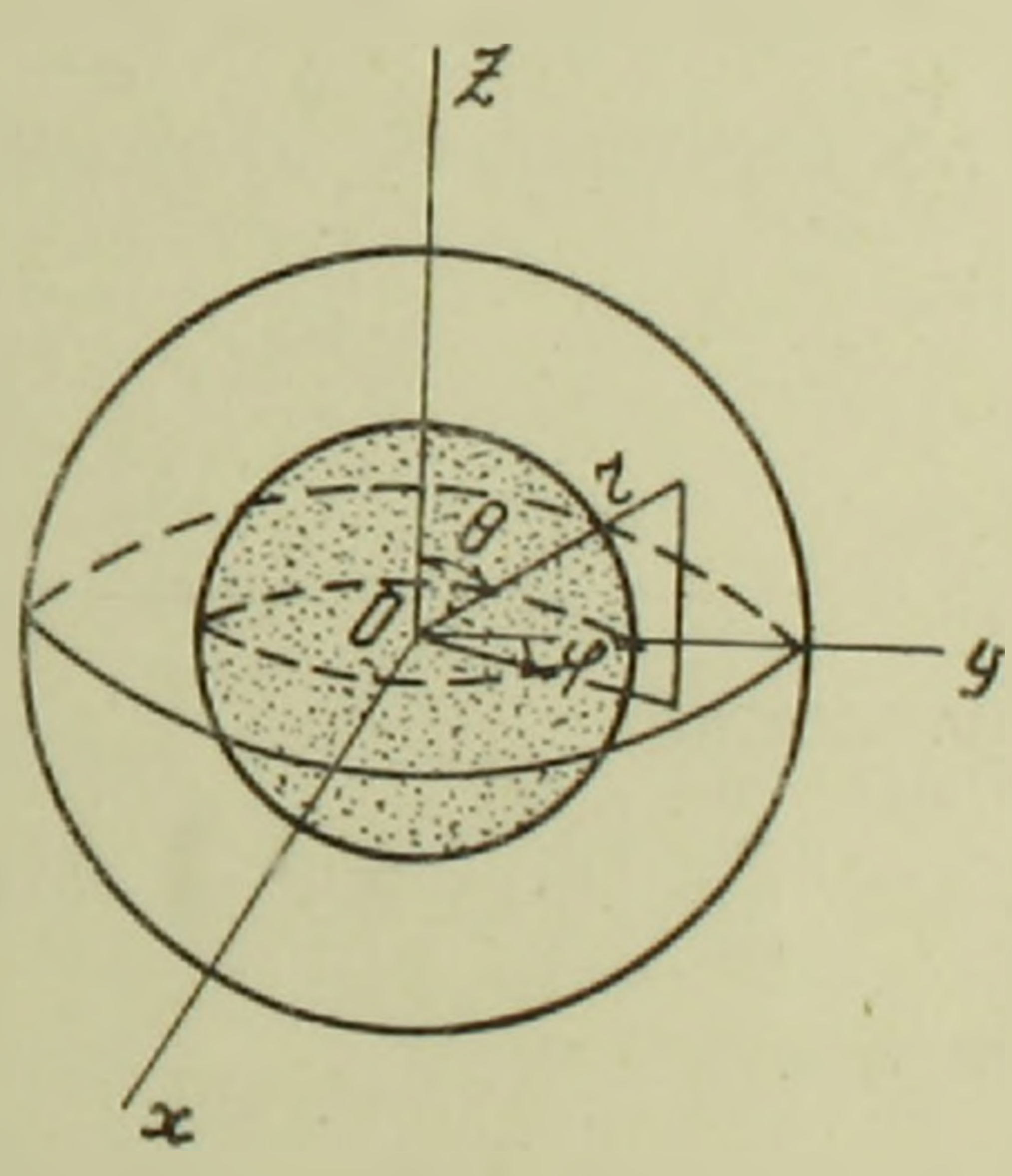
Р. С. Минасян

О распространении тепла во вращающемся неоднородном шаре при наличии теплообмена с окружающей средой

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 29/I 1962)

Вопрос об определении теплового поля в однородных стержне и цилиндре, движущихся по направлению их оси, был рассмотрен Карслоу и Егером [1]. Ряд задач распределения температуры в пластинке, цилиндре и шаре с движущимися источниками тепла был решен в исследованиях [2-7].

В настоящей заметке приводится решение задачи распространения тепла в неоднородном (составном) шаре, составленном из полой сферы ($r_0 < r < R$) и находящегося внутри нее шара ($0 < r < r_0$) с различными теплофизическими характеристиками (фиг. 1), вращающемся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью, когда на поверхности происходит теплообмен с окружающей (неподвижной) средой. Предполагаем, что температура окружающей среды, произвольным образом распределенная по поверхности шара, не зависит от времени. В этом случае тепловое поле шара по отношению к внешней среде будет квазистационарным [3], и если обозначим через U_1 температуру внутри шара $0 < r < r_0$, а через U_2—температуру сферы $r_0 < r < R$, то U_1 и U_2 будут удовлетворять следующему дифференциальному уравнению в неподвижной системе координат [3,8]



Фиг. 6.

$$\omega \frac{\partial U_l}{\partial \varphi} = \frac{a_l}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U_l}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_l}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_l}{\partial\varphi^2}\right] \quad (1)$$

$$(l = 1,\ 2),$$

а также условиям сопряжения на поверхности раздела $r = r_0$ и граничному условию

$$U_1\big|_{r=r_0} = U_2\big|_{r=r_0}; \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0};$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}\bigg|_{r=R} = h\left[T(\varphi, \theta) - U_2\big|_{r=R}\right]. \tag{2}$$

Здесь a_l — коэффициент температуропроводности материала l-ой области ($l = 1, 2$), λ_l — коэффициент теплопроводности, ω — скорость вращения шара по отношению к окружающей среде, h — коэффициент теплообмена сферы с окружающей средой, $T(\varphi, \theta)$ – температура окружающей среды.

Относительно функции $T(\varphi, \theta)$ предполагаем, что она удовлетворяет условиям Дирихле.

Прежде чем переходить к решению задачи, преобразуем уравнение (1), введя обозначения

$$\cos\theta = \zeta; \quad U_l(r, \varphi, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} U_l^*(r, \varphi, \zeta). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), будем иметь

$$\frac{\partial U_l^*}{\partial \varphi} = \frac{a_l}{\omega r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_l^*}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{\partial U_l^*}{\partial \zeta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2 U_l^*}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4}U_l^*\right] \quad (l = 1;\ 2). \tag{4}$$

Разложим U_1^* и U_2^* в ряд по присоединенным функциям Лежандра и показательным функциям:

$$U_l^*(r, \varphi, \zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} F_{j,k}^{(l)}(r)\, P_j^k(\zeta)\, e^{ik\varphi}, \tag{5}$$

где $P_j^k(\zeta)$ — присоединенные функции Лежандра [9], удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}P_j^k(\zeta)\right] + \left[j(j+1) - \frac{k^2}{1-\zeta^2}\right]P_j^k(\zeta) = 0,$$

причем

$$P_j^{-k}(\zeta) = \frac{(-1)^k (j-k)!}{(j+k)!}P_j^k(\zeta); \quad P_j^k(\zeta) = 0 \quad (k > j);$$

$$F_{j,k}^{(l)}(r) = \frac{1}{2\pi L_{j,k}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} U_l^*(r, \varphi, \zeta)\, P_j^k(\zeta)\, e^{-ik\varphi}\, d\zeta\, d\varphi;$$

$$L_{j,k} = \int_{-1}^{1}[P_j^k(\zeta)]^2\, d\zeta = \frac{2(j+k)!}{(2j+1)(j-k)!}.$$

Умножая уравнение (3) на $\dfrac{1}{2\pi L_{j,k}} P_j^k(\zeta)\, e^{-ik\varphi}\, d\zeta\, d\varphi$ и интегрируя по φ от 0 до 2π, а по ζ от -1 до $+1$, для $F_{j,k}^{(l)}(r)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$F_{j,k}^{(l)''}(r) + \frac{1}{r} F_{j,k}^{(l)'}(r) + \left[\frac{i\omega k}{a_l} - \frac{1}{r^2}\left(j + \frac{1}{2}\right)^2\right] F_{j,k}^{(l)}(r) = 0. \qquad (6)$$

Граничные условия для $F_{j,k}^{(l)}(r)$, согласно (2), (3) и (5), будут

$$F_{j,k}^{(1)}(0) = 0; \quad F_{j,k}^{(1)}(r_0) = F_{j,k}^{(2)}(r_0); \quad \lambda_1 F_{j,k}^{(1)'}(r_0) = \lambda_2 F_{j,k}^{(2)'}(r_0) +$$

$$+ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2r_0} F_{j,k}^{(1)}(r_0); \quad F_{j,k}^{(2)'}(R) + \left(h - \frac{1}{2R}\right) F_{j,k}^{(2)}(R) = hg_{j,k}, \qquad (7)$$

где

$$g_{j,k} = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{2\pi L_{j,k}} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} T(\varphi, \zeta)\, P_l^k(\zeta)\, e^{-ik\varphi}\, d\zeta\, d\varphi. \qquad (8)$$

Решая уравнение (6) и удовлетворяя условиям (7), после некоторых преобразований получим следующие выражения для $F_{j,k}^{(1)}(r)$ и $F_{j,k}^{(2)}(r)$:

$$F_{j,k}^{(1)}(r) = \frac{(-1)^j \lambda_2 h}{\pi r_0 \delta_{j,k}} g_{j,k} \cdot J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(1)} r);$$

$$F_{j,k}^{(2)}(r) = \frac{hg_{j,k}}{\delta_{j,k}} \Big\{ J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} r) \big[\xi_{j,k}^{(1)} J_{-j-\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} r_0) -$$

$$- \xi_{-j,k}^{(2)} J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(1)} r_0\big] - J_{-j-\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} r) \big[\xi_{j,k}^{(1)} J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\mu_k^{(2)} r_0) -$$

$$- \xi_{j,k}^{(2)} J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(1)} r_0)\big]\Big\}. \qquad (9)$$

Здесь $J_{j+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя первого рода $j+\frac{1}{2}$-го порядка;

$$\mu_k^{(l)} = \sqrt{\frac{\omega k}{a_l}};$$

$$\delta_{j,k} = \eta_{j,k}[\xi_{j,k}^{(1)} J_{-j-\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\mu_k^{(2)} r_0) - \xi_{-j,k}^{(2)} J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(1)} r_0)] -$$

$$- \eta_{-j,k}[\xi_{j,k}^{(1)} J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} r_0) - \xi_{i,k}^{(2)} J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(1)} r_0)];$$

$$\eta_{j,k} = \sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} J'_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} R) + \left(h - \frac{1}{2R}\right) J_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} R);$$

$$(10)$$

$$\eta_{-j,k} = \sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} J'_{-j-\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} R) + \left(h - \frac{1}{2R}\right) J_{-j-\frac{1}{2}}(\sqrt{-i}\, \mu_k^{(2)} R);$$

$$\xi^{(l)}_{j,k} = \lambda_l \left[\sqrt{-i}\,\mu^{(l)}_k J'_{j+\frac{1}{2}} (\sqrt{-i}\,\mu^{(l)}_k r_0) - \frac{1}{2r_0} J_{j+\frac{1}{2}} (\sqrt{-i}\,\mu^{(l)}_k r_0) \right].$$

Группируя в (5) взаимно сопряженные члены и принимая во внимание (3), будем иметь

$$U_l(r, \varphi, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ \Phi^{(l)}_{j,0}(r) P_j(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{j} [f^{(l)}_{j,k}(r) \sin k\varphi + $$

$$+ \Phi^{(l)}_{j,k}(r) \cos k\varphi] P^k_j(\cos\theta) \Big\} \quad (l = 1, 2). \tag{11}$$

Выражения для $f^{(l)}_{j,k}(r)$ и $\Phi^{(l)}_{j,k}(r)$, согласно (9) и (10), имеют вид

$$f^{(1)}_{j,k}(r) = \frac{2\lambda_2 h (-1)^j}{\pi r_0 (D^{(2)}_{j,k} + D^{*2}_{j,k})} [\Omega_{j,k} u_{j+\frac{1}{2}} (\nu^{(1)}_k r) - \Omega^*_{j,k} v_{j+\frac{1}{2}} (\nu^{(1)}_k r)];$$

$$\Phi^{(1)}_{j,k}(r) = \frac{2\lambda_2 h (-1)^j}{\pi r_0 (D^2_{j,k} + D^{*2}_{j,k})} [\Omega^*_{j,k} u_{j+\frac{1}{2}} (\nu^{(1)}_k r) + \Omega_{j,k} v_{j+\frac{1}{2}} (\nu^{(1)}_k r)];$$

$$\tag{12}$$

$$f^{(2)}_{j,k}(r) = \frac{h}{D^2_{j,k} + D^{*2}_{j,k}} [\Omega_{j,k} G_{j,k} (\nu^{(2)}_k r) - \Omega^*_{j,k} G^*_{j,k} (\nu^{(2)}_k r)];$$

$$\Phi^{(2)}_{j,k}(r) = \frac{h}{D^2_{j,k} + D^{*2}_{j,k}} [\Omega^*_{j,k} G_{j,k} (\nu^{(2)}_k r) + \Omega_{j,k} G^*_{j,k} (\nu^{(2)}_k r)].$$

Здесь введены следующие обозначения: $u_n(r) = ber_n(r)$ и $v_n(r) = bei_n(r)$ — функции Томсона первого рода n-го порядка, представляющие вещественную и мнимую части функции Бесселя от комплексного аргумента: $J_n((1+i)r) = u_n(r) + iv_n(r)$;

$$\Omega_{j,k} = m_{j,k} D_{j,k} + n_{j,k} D^*_{j,k}; \quad \Omega^*_{j,k} = n_{j,k} \cdot D_{j,k} - m_{j,k} D^*_{j,k};$$

$$m_{j,k} = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{\pi L_{j,k}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} T(\varphi, \theta) P^k_j(\cos\theta) \sin k\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$n_{j,k} = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{\pi L_{j,k}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} T(\varphi, \theta) P^k_j(\cos\theta) \cos k\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$D_{j,k} = H_{j,k} A_{j,k} - H^*_{j,k} A^*_{j,k} - H_{-j,k} C_{j,k} + H^*_{-j,k} \cdot C^*_{j,k}$$

$$D^*_{j,k} = H^*_{j,k} A_{j,k} + H_{j,k} A^*_{j,k} - H^*_{-j,k} C_{j,k} - H_{-j,k} \cdot C^*_{j,k}$$

$$A_{j,k} = M^{(1)}_{j,k} u_{-j-\frac{1}{2}} (\nu^{(2)}_k r_0) - N^{(1)}_{j,k} v_{-j-\frac{1}{2}} (\nu^{(2)}_k r_0) - M^{(2)}_{-j,k} u_{j+\frac{1}{2}} (\nu^{(1)}_k r_0) +$$

$$+ N^{(2)}_{-j,k} v_{j+\frac{1}{2}} (\nu^{(1)}_k r_0); \tag{13}$$

$$A^*_{j,k} = N^{(1)}_{j,k} u_{-j-\frac{1}{2}} (\nu^{(2)}_k r_0) + M^{(1)}_{j,k} v_{-j-\frac{1}{2}} (\nu^{(2)}_k r_0) -$$

$$-N^{(2)}_{-j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r_0)-M^{(2)}_{-j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r_0);$$

$$C_{j,k}=M^{(1)}_{j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k r_0)-N^{(1)}_{j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k r_0)-$$

$$-M^{(2)}_{j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r_0)+N^{(2)}_{j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r_0);$$

$$C^*_{j,k}=N^{(1)}_{j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k r_0)+M^{(1)}_{j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k r_0)-$$

$$-N^{(2)}_{j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r_0)-M^{(2)}_{j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r_0);$$

$$H_{j,k}=\nu^{(2)}_k\,u'_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R)+\left(h-\frac{1}{2R}\right)u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R);\qquad \nu^{(l)}_k=\sqrt{\frac{\omega_k}{2a_l}}$$

$$H^*_{j,k}=\nu^{(2)}_k\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R)+\left(h-\frac{1}{2R}\right)v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R);$$

$$M^{(l)}_{j,k}=\lambda_l\left[\nu^{(l)}_k\,u'_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(l)}_k r_0)-\frac{1}{2r_0}\,u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(l)}_k r_0)\right];$$

$$N^{(l)}_{j,k}=\lambda_l\left[\nu^{(l)}_k\,v'_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(l)}_k r_0)-\frac{1}{2r_0}\,v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(l)}_k r_0)\right];$$

$$G_{j,k}(r)=A_{j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(r)-A^*_{j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(r)-C_{j,k}\,u_{-j-\frac{1}{2}}(r)+C^*_{j,k}\,v_{-j-\frac{1}{2}}(r);$$

$$G^*_{j,k}(r)=A^*_{j,k}\,u_{j+\frac{1}{2}}(r)+A_{j,k}\,v_{j+\frac{1}{2}}(r)-C^*_{j,k}\,u_{-j-\frac{1}{2}}(r)-C_{j,k}\,v_{-j-\frac{1}{2}}(r).$$

Для $k=0$ имеем

$$\Phi^{(1)}_{j,0}(r)=\frac{hn_{j,0}}{q_j}\lambda_2 h(2j+1)R^{\frac{1}{2}}\,r^{j+\frac{1}{2}};$$

$$\Phi^{(2)}_{j,0}(r)=\frac{hn_{j,0}}{q_j}R^{\frac{1}{2}}\,r^{\frac{1}{2}}\left\{[\lambda_1 j+\lambda_2(j+1)]\,r^j-(\lambda_1-\lambda_2)\,jr_0^{2j+1}r^{-j-1}\right\},\tag{14}$$

где

$$q_j=[\lambda_1 j+\lambda_2(j+1)](j+hR)\,R^j+(\lambda_1-\lambda_2)\,j(j+1-hR)\,R^{-j-1}r_0^{2j+1}\tag{15}$$

Заметим, что при переходе к подвижной системе координат (r,φ_1,θ), вращающейся вместе с шаром, в выражениях (11) φ нужно заменить на $\varphi_1+\omega t$.

В заключение разберем некоторые предельные случаи.

а) Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$; $a_1=a_2$ (однородный шар), то $\nu^{(1)}_k=\nu^{(2)}_k=\nu_k$, и, принимая во внимание легко получаемые соотношения между функциями Томсона

$$u'_n(r)\,u_{-n}(r) - v'_n(r)\,v_{-n}(r) - u'_{-n}(r)\,u_n(r) + v'_{-n}(r)\,v_n(r) = \frac{2\sin n\pi}{\pi r},$$

$$u'_n(r)\,v_{-n}(r) + v'_n(r)\,u'_{-n}(r) - u'_{-n}(r)\,v_n(r) - v'_{-n}(r)\,u_n(r) = 0, \tag{16}$$

из (13) получим

$$A_{j,k} = \frac{2\lambda(-1)^j}{\pi r_0}; \quad A^*_{j,k} = C_{j,k} = C^*_{j,k} = 0; \quad D_{j,k} = \frac{2\lambda(-1)^j}{\pi r_0} H_{j,k};$$

$$D^*_{j,k} = \frac{2\lambda}{\pi r_0}(-1)^j H^*_{j,k}; \quad G_{j,k}(r) = \frac{2\lambda(-1)^j}{\pi r_0} u_{j+\frac{1}{2}}(\nu_k r);$$

$$G^*_{j,k}(r) = \frac{2\lambda(-1)^j}{\pi r_0} v_{j+\frac{1}{2}}(\nu_k r),$$

и выражения (12) значительно упростятся:

$$f^{(1)}_{j,k}(r) = f^{(2)}_{j,k}(r) = \frac{1}{H^2_{j,k} + H^{*2}_{j,k}} [(H_{j,k} m_{j,k} + H^*_{j,k} n_{j,k})\, u_{j+\frac{1}{2}}(\nu_k r) -$$

$$- (H_{j,k} n_{j,k} - H^*_{j,k} m_{i,k})\, v_{j+\frac{1}{2}}(\nu_k r)],$$

$$\Phi^{(1)}_{j,k}(r) = \Phi^{(2)}_{j,k}(r) = \frac{1}{H^2_{j,k} + H^{*2}_{j,k}} [(H_{j,k} n_{j,k} - H^*_{j,k} m_{j,k})\, u_{j+\frac{1}{2}}(\nu_k r) + \tag{17}$$

$$+ (H_{j,k} m_{j,k} + H^*_{j,k} n_{j,k})\, v_{j+\frac{1}{2}}(\nu_k r)]. \quad (0 < r < R)$$

б) Если $h = 0$ и если при этом $\lim\limits_{h\to 0} hT(\varphi, \theta) = T^*(\varphi, \theta)$, получаем неоднородный шар с заданным на поверхности распределением плотности теплового потока, перемещающимся (в направлении, обратном вращению шара) со скоростью ω.

В этом случае получим

$$\lim_{h\to 0} hm_{j,k} = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{2\pi L_{j,k}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T^*(\varphi, \theta)\, P^k_j(\cos\theta) \sin k\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = m^*_{j,k};$$

$$\lim_{h\to 0} hn_{j,k} = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{2\pi L_{j,k}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T^*(\varphi, \theta)\, P^k_j(\cos\theta) \cos k\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = n^*_{j,k} \tag{18}$$

Выведем условие разрешимости задачи Неймана для периодического течения тепла. Применяя формулу Грина [10], имеем

$$\iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds = \iiint\limits_{(v)} \Delta U dv,$$

откуда, интегрируя по t от 0 до t_0, где t_0—период изменения температуры U, и воспользовавшись уравнением теплопроводности $\frac{\partial U}{\partial t} = a\Delta U$, будем иметь

$$\int\limits_0^{t_0}\iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n}\,ds\,dt = \frac{1}{a}\iiint\limits_{(v)}\int\limits_0^{t_0} \frac{\partial U}{\partial t}\,dt\,dv = \frac{1}{a}\iiint\limits_{(v)} [U|_{t=t_0} - U|_{t=0}]\,dv = 0. \tag{19}$$

Применяя формулу (19) последовательно к U_1 и U_2, получим $\int\limits_0^{t_0}\iint\limits_{(s)} T^*\,ds\,dt = 0$, откуда, согласно (18), имеем $n^*_{j,0} = 0$; и U_1 и U_2 определятся с точностью до произвольной постоянной.

в) При $h \to \infty$ получаем шар с заданным на поверхности распределением температуры, перемещающимся со скоростью ω. В этом случае

$$\begin{gathered} f^{(1)}_{j,k}(r) = \frac{2\lambda_2(-1)^j}{\pi r_0(\mathrm{E}^2_{j,k} + \mathrm{E}^{*2}_{j,k})}\left[(\mathrm{E}_{j,k} m_{j,k} + \mathrm{E}^*_{j,k} n_{j,k})\, u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r) - \right. \\ \left. -(\mathrm{E}_{j,k} n_{j,k} - \mathrm{E}^*_{j,k} m_{j,k})\, v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(1)}_k r)\right]; \\ f^{(2)}_{j,k}(r) = \frac{1}{\mathrm{E}^2_{j,k} + \mathrm{E}^{*2}_{j,k}}\left[(\mathrm{E}_{j,k} m_{j,k} + \mathrm{E}^*_{j,k} n_{j,k})\, G_{j,k}(\nu^{(2)}_k r) - \right. \\ \left. -(\mathrm{E}_{j,k} n_{j,k} - \mathrm{E}^*_{j,k} m^*_{j,k})\, G^*_{j,k}(\nu^{(2)}_k r)\right], \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\mathrm{E}_{j,k} = A_{j,k} u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R) - A^*_{j,k} v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R) - $$
$$- C_{j,k} u_{-j-\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R) + C^*_{j,k} v_{-j-\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R);$$
$$\mathrm{E}_{j,k} = A_{j,k} v_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R) + A^*_{j,k} u_{j+\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R) - $$
$$- C_{j,k} v_{-j-\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R) - C^*_{j,k} u_{-j-\frac{1}{2}}(\nu^{(2)}_k R).$$

Чтобы получить выражения для $\Phi^{(1)}_{j,k}(r)$ и $\Phi^{(2)}_{j,k}(r)$, нужно в (20) $m_{j,k}$ и $n_{j,k}$ поменять местами.

г) При $\lambda_1 = 0$ получаем задачу распространения тепла в полой сфере с теплоизолированной внутренней поверхностью $r = r_0$.

д) Если $\omega = 0$, получаем стационарный режим. При этом, принимая во внимание, что $\lim\limits_{\omega\to 0} \omega^{-\frac{n}{2}} I_n(\sqrt{-i}\,\mu^{(l)}_k r) = \left(-\frac{ik}{a_l}\right)^{n/2}\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$, имеем

$$f_{j,k}^{(1)}(r) = \frac{hm_{j,k}}{q_j}(2j+1)\lambda_2 hR^{\frac{1}{2}} r^{j+\frac{1}{2}};$$

$$f_{j,k}^{(2)}(r) = \frac{hm_{j,k}}{q_j} R^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \{[\lambda_1 j + \lambda_2 (j+1)] r^j - (\lambda_1 - \lambda_2) j r_0^{2j+1} r^{-j-1}\}.$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Պտտվող անհամասեռ գնդում ջերմության տարածման մասին՝ շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակման առկայության դեպքում

Հոդվածում դիտարկվում է ջերմության տարածման խնդիրը պտտվող անհամասեռ գնդում, երբ այն կազմված է տարբեր նյութերից բաղկացած սնամեջ սֆերայից ու նրա ներսում գտնվող գնդից: Ենթադրվում է, որ անհամասեռ գնդի արտաքին մակերևույթի վրա տեղի ունի ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է շրջանային, Թոմսոնի և Լեժանդրի ընդհանրացրած ֆունկցիաներից կազմված շարքերով:

Հետազոտվում են որոշ սահմանային դեպքեր՝ երբ գունդը համասեռ է, երբ տրված է գնդի արտաքին մակերևույթով անցնող ջերմային հոսքի խտության բաշխումը, այդ խտության մակերևույթի վրա տեղափոխվելու ժամանակ և այլն:

Դուրս է բերվում Նեյմանի խնդրի լուծելիության պայմանը ջերմության պարբերական հոսանքի համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. S. Carslaw* aud *J. C. Jaeger*, Conduction of heat in solinds. Oxford, 1948. [2] *Н. Н. Рыкалин*, Расчеты тепловых процессов при сварке, Машгиз. 1951. [3] *П. Шнейдер*, Инженерные проблемы теплопроводности. Изд. ин. лит. 1960. [4] *Б. Г. Коренев*, Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Физматгиз. 1960. [5] *И. К. Егер*, Phil. Mag., vol. XXXV, № 242 1944. [6] *С. И. Шабанов*, ЖТФ, XXIV вып. 5, 1954. [7] *Р. Гофман*, ZAMP, vol. X fasc. 3, 1959. [8] *Д. Розенталь*, Trans. ASME, 68, 1946. [9] *H. Bateman*, Partial differential equations of mathematical physics, N. Y., 1944. [10] *С. Л. Соболев*, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1950.